

Solucionario

CÁLCULO INTEGRAL

Fernando Araujo Rodríguez



Universidad Politécnica Salesiana

Solucionario

de cálculo integral

Fernando Araujo Rodríguez

Solucionario

de cálculo integral



2018

SOLUCIONARIO DE CÁLCULO INTEGRAL

© *Fernando Araujo Rodríguez*

1ra edición: Universidad Politécnica Salesiana
Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja
Cuenca-Ecuador
Casilla: 2074
P.B.X. (+593 7) 2050000
Fax: (+593 7) 4 088958
e-mail: rpublicas@ups.edu.ec
www.ups.edu.ec

Área de Ciencia y Tecnología
CARRERA DE COMPUTACIÓN

Diagramación,
diseño y edición: Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

Derechos de autor: 053096

ISBN UPS: 978-9978-10-296-1

Tiraje: 50 ejemplares

Impresión: Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

Impreso en Quito-Ecuador, abril de 2018

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana

Índice

Índice de figuras.....	7
Prefacio	11
Solución de ejercicios propuestos sobre Cambio de Variable	13
Solución de ejercicios propuestos sobre Integración por Partes.....	17
Solución de ejercicios propuestos sobre Integrales Trigonométricas	23
Solución de ejercicios propuestos sobre Sustitución Trigonométrica	31
Solución de ejercicios propuestos sobre fracciones parciales.....	43
Solución ejercicios propuestos de Integración de Expresiones Cuadráticas.....	59
Solución a ejercicios propuestos sobre Sustituciones Diversas.....	65
Solución de ejercicios propuestos sobre Cambio de Límites correspondiente a un cambio de variables.....	73
Solución ejercicios propuestos sobre Área Bajo la Curva	77
Solución de ejercicios propuestos de Integrales Impropias	91
Solución de ejercicios propuestos sobre Volúmenes.....	93
Solución ejercicios propuestos sobre Volumen de Sección Recta Conocida	111
Solución ejercicios propuestos sobre Cálculo de Longitud de Arco.....	117
Solución ejercicios propuestos sobre Cálculo de Áreas de Superficies de Revolución	125

Solución ejercicios propuestos sobre Trabajo	133
Solución ejercicios propuestos sobre Fuerza Ejercida por un Líquido	137
Solución de ejercicios propuestos sobre Centroides y Momento de Inercia	143
Solución de ejercicios propuestos sobre Ecuaciones Paramétricas.....	151
Solución de ejercicios propuestos sobre Coordenadas Polares.....	157

Índice de figuras

Figura 1: Ejercicio propuesto 1 sobre Área bajo la curva.....	77
Figura 2: Ejercicio Propuesto 2 sobre Área Bajo la Curva.....	79
Figura 3: Ejercicio propuesto 3 sobre Área Bajo la Curva.....	80
Figura 4: Ejercicio propuesto 4 sobre Área Bajo la Curva.....	81
Figura 5: Ejercicio propuesto 4 sobre Área Bajo la Curva.....	82
Figura 6: Ejercicio propuesto 5 sobre Área Bajo la Curva.....	83
Figura 7: Ejercicio propuesto 6 sobre Área Bajo la Curva.....	84
Figura 8: Ejercicio propuesto 7 sobre Área Bajo la Curva.....	85
Figura 9: Ejercicio propuesto 8 sobre Área Bajo la Curva.....	86
Figura 10: Ejercicio propuesto 9 sobre Área Bajo la Curva.....	87
Figura 11: Ejercicio propuesto 10 sobre Área Bajo la Curva.....	89
Figura 12: Ejercicio propuesto 1 sobre ejercicios Volúmenes	93
Figura 13: Ejercicio propuesto 2 sobre Volúmenes.....	94
Figura 14: Ejercicio propuesto 3 sobre Volúmenes.....	95
Figura 15: Ejercicio propuesto 4 sobre Volúmenes.....	96
Figura 16: Ejercicio propuesto 5 sobre Volúmenes.....	97
Figura 17: Ejercicio propuesto 6 sobre Volúmenes.....	98
Figura 18: Ejercicio propuesto 7 sobre Volúmenes.....	99
Figura 19: Ejercicio propuesto 8 sobre Volúmenes.....	100

Figura 20: Ejercicio propuesto 9 sobre Volúmenes.....	101
Figura 21: Ejercicio propuesto 10 sobre Volúmenes.....	102
Figura 22: Ejercicio propuesto 11 sobre Volúmenes.....	103
Figura 23: Ejercicio propuesto 12 sobre Volúmenes.....	105
Figura 24: Ejercicio propuesto 13 sobre Volúmenes.....	107
Figura 25: Ejercicio propuesto 14 sobre Volúmenes.....	108
Figura 26: Ejercicio propuesto 15 sobre Volúmenes.....	109
Figura 27: Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida.....	111
Figura 28: Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida.....	112
Figura 29: Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida.....	113
Figura 30: Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida.....	114
Figura 31: Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida.....	115
Figura 32: Ejercicio sobre Longitud de Arco.....	117
Figura 33: Ejercicio sobre Longitud de Arco.....	118
Figura 34: Ejercicio sobre Longitud de Arco.....	120
Figura 35: Ejercicio sobre Longitud de Arco.....	121
Figura 36: Ejercicio sobre Longitud de Arco.....	123
Figura 37: Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución.....	125
Figura 38: Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución.....	127
Figura 39: Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución.....	128
Figura 40: Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución.....	129
Figura 41: Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución.....	131

Figura 42: Ejercicio sobre Trabajo	134
Figura 43: Ejercicio sobre Trabajo	135
Figura 44: Ejercicio sobre Trabajo	136
Figura 45: Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido	137
Figura 46: Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido	138
Figura 47: Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido	140
Figura 48: Ejercicio sobre Centroide	143
Figura 49: Ejercicio sobre Centroide	144
Figura 50: Ejercicio sobre Centroide	145
Figura 51: Ejercicio sobre Centroide	147
Figura 52: Ejercicio sobre Centroide	148
Figura 53: Ejercicio sobre Derivadas de Ecuaciones Paramétricas	155
Figura 54: Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares.....	160
Figura 55: Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares.....	161
Figura 56: Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares.....	163
Figura 57: Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares.....	165
Figura 58: Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares.....	166

Prefacio

El presente libro es complemento del libro Cálculo Integral, en donde a diferencia de la mayoría de libros de Cálculo, todos los ejercicios propuestos tienen respuesta y su desarrollo está hecho en esta obra.

Está orientado sobre todo a profesores de la materia para que sirva como banco de problemas a desarrollar en clase, talleres, deberes, lecciones o exámenes.

La numeración de los problemas y sus figuras guardan relación con el libro principal de tal manera de poder trabajar con ambos libros para obtener el mejor resultado.

Solución de ejercicios propuestos sobre Cambio de Variable

Ejercicio 1

$$\int \cos^4 x \sin x \, dx$$

$$u = \cos x \quad du = -\sin x \, dx$$

$$-\int u^4 \, du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

Ejercicio 2

$$\int \left[\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right] dx$$

$$\int \frac{dx}{2x-1} - \int \frac{dx}{2x+1} \quad u = 2x-1 \quad du = 2 \, dx \quad dx = du/2$$

$$v = 2x+1 \quad du = 2 \, dx \quad dv = dv/2$$

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} - \int \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|u| - \ln|v|] + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u}{v} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + C$$

$$= \ln \sqrt{\left| \frac{2x-1}{2x+1} \right|}$$

Ejercicio 3

$$\int \frac{6e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$u = \frac{1}{x} \quad du = -\frac{1}{x^2} dx \quad dx = -x^2 du$$

$$6 \int \frac{e^u}{x^2} (-x^2 du) = -6 \int e^u du = -6e^u + C$$

$$= -6e^{1/x} + C$$

Ejercicio 4

$$\int tg\left(\frac{x}{2}\right) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$u = \frac{x}{2} \quad du = \frac{dx}{2} \quad dx = 2du$$

$$\int tg u \sec^2 u \, du(2) = 2 \int tg u \sec^2 u \, du$$

$$= 2 \int \sec u \sec u \, tg u \, du \quad v = \sec u$$

$$dv = \sec u \, tg u \, du$$

$$= 2 \int v \, dv = 2 \frac{v^2}{2} + C = \sec^2 u + C = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ejercicio 5

$$\int \frac{\sen x \, dx}{1 - \cos x}$$

$$u = 1 - \cos x \quad du = -(-\sen x) dx \quad dx = \frac{du}{\sen x}$$

$$\int \frac{\sen x}{u} \frac{du}{\sen x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1 - \cos x| + C$$

Ejercicio 6

$$\int e^{tg \ 2x} \sec^2 2x \, dx$$

$$u = 2x \qquad du = 2dx \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int e^{tg \ u} \sec^2 u \, du \qquad v = tg \ u \qquad dv = \sec^2 u \, du$$

$$\frac{1}{2} \int e^v \, dv = \frac{1}{2} e^v + C = \frac{1}{2} e^{tg \ u} + C = \frac{1}{2} e^{tg \ 2x} + C$$

Ejercicio 7

$$\int x^3 e^{x^4} \, dx$$

$$u = x^4 \qquad du = 4x^3 dx \qquad dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$\int x^3 e^u \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4} \int e^u \, du = \frac{1}{4} e^u + C = \frac{1}{4} e^{x^4} + C$$

Ejercicio 8

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} \, dx$$

$$t^3 = 1 + 2x \qquad x = \frac{t^3 - 1}{2} \qquad dx = \frac{3t^2}{2} dt = \frac{3}{2} t^2 dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t} \frac{3}{2} t^2 dt &= \frac{3}{8} \int (t^6 - 2t^3 + 1) t dt = \frac{3}{8} \left[\int t^7 dt - 2 \int t^4 dt + \int t dt \right] \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{t^8}{8} - 2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right] + C \\ &= \frac{3}{64} (\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20} (\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16} (\sqrt[3]{1+2x})^2 + C \end{aligned}$$

Ejercicio 9

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$t^2 = x^2 + 1 \quad x = \sqrt{t^2-1} \quad dx = \frac{1}{2}(t^2-1)^{-1/2}(2t)dt = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\int \frac{(\sqrt{t^2-1})^3}{t} \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C$$

$$\frac{1}{3}(\sqrt{x^2-1})^3 - \sqrt{x^2-1} + C$$

Ejercicio 10

$$\int \frac{1}{x^3} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} dx$$

$$u = 1 - \frac{1}{x^2} \quad du = \frac{2xdx}{x^4} = \frac{2}{x^3} dx \quad dx = \frac{x^3}{2} du$$

$$\int \frac{1}{x^3} \sqrt{u} \frac{x^3}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3/2} + C = \frac{1}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^3} + C$$

Solución de ejercicios propuestos sobre Integración por Partes

Ejercicio 1

$$\int \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x} \right) dx = x \ln x - x + C$$

Ejercicio 2

$$\int \text{Sen}^2 x \, dx$$

$$u = \text{Sen} x \qquad dv = \text{Sen} x \, dx$$

$$du = \text{Cos} x \, dx \qquad v = -\text{Cos} x$$

$$\int \text{Sen}^2 x \, dx = \text{Sen} x (-\text{Cos} x) - \int (-\text{Cos} x)(\text{Cos} x) \, dx$$

$$= -\text{Sen} x \text{Cos} x + \int \text{Cos}^2 x \, dx$$

$$= -\text{Sen} x \text{Cos} x + \int (1 - \text{Sen}^2 x) \, dx$$

$$= -\text{Sen} x \text{Cos} x + \int dx - \int \text{Sen}^2 x \, dx$$

Pasando la 2da Integral al lado izquierdo de la ecuación:

$$\begin{aligned} 2 \int \text{Sen}^2 x dx &= -\text{Sen} x \text{Cos} x + x + C \\ &= \frac{x - \text{Sen} x \text{Cos} x}{2} + C \end{aligned}$$

En donde C/2 sigue siendo constante que se la representa por la misma C.

Ejercicio 3

$$\int (x^3 - 2x - 5) \text{Sen} 2x \, dx$$

$$u = x^3 - 2x - 5 \quad v = -\frac{1}{2} \text{Cos} 2x$$

$$du = (3x^2 - 2) dx \quad dv = \text{Sen} 2x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 2x - 5) \text{Sen} 2x \, dx &= (x^3 - 2x - 5) \left(-\frac{1}{2} \text{Cos} 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \text{Cos} 2x \right) (3x^2 - 2) dx \\ &= -\frac{1}{2} (x^3 - 2x - 5) \text{Cos} 2x + \frac{1}{2} \int (3x^2 - 2) \text{Cos} 2x \, dx \end{aligned}$$

$$u = 3x^2 - 2 \quad v = \frac{1}{2} \text{Sen} 2x$$

$$du = 6x \, dx \quad dv = \text{Cos} 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} (x^3 - 2x - 5) \text{Cos} 2x + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (3x^2 - 2) \text{Sen} 2x - \int \frac{1}{2} \text{Sen} 2x (6x) dx \right]$$

$$= -\frac{1}{2} (x^3 - 2x - 5) \text{Cos} 2x + \frac{1}{4} (3x^2 - 2) \text{Sen} 2x - \frac{6}{4} \int x \text{Sen} 2x \, dx$$

$$u = x \quad v = \frac{1}{2} (-\text{Cos} 2x)$$

$$du = dx \quad dv = \text{Sen} 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} (x^3 - 2x - 5) \text{Cos} 2x + \frac{1}{4} (3x^2 - 2) \text{Sen} 2x - \frac{6}{4} \left[-\frac{1}{2} x \text{Cos} 2x + \frac{1}{2} \int \text{Cos} 2x \, dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}(x^3-2x-5)\cos 2x + \frac{1}{4}(3x^2-2)\operatorname{Sen} 2x + \frac{6}{8}x\cos 2x - \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{Sen} 2x + C \\
&= -\frac{1}{2}(x^3-2x-5)\cos 2x + \frac{1}{4}(3x^2-2)\operatorname{Sen} 2x + \frac{3}{4}x\cos 2x - \frac{3}{8}\operatorname{Sen} 2x + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$\int \frac{x}{e^x} dx$$

$$u = x \quad v = -e^{-x}$$

$$du = dx \quad dv = e^{-x} dx$$

$$\int \frac{x}{e^x} dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) du = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Ejercicio 5

$$\int e^{3x} \operatorname{Sen} 2x dx$$

$$u = e^{3x} \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad dv = \operatorname{Sen} 2x dx$$

$$\int e^{3x} \operatorname{Sen} 2x dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) (3e^{3x}) dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x dx$$

$$u = e^{3x} \quad v = \frac{1}{2} \operatorname{Sen} 2x$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad dv = \cos 2x dx$$

$$\int e^{3x} \operatorname{Sen} 2x dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{3x} \operatorname{Sen} 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \operatorname{Sen} 2x dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x dx \\
 \frac{13}{4}\int e^{3x}\sin 2x dx &= -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x \\
 \int e^{3x}\sin 2x dx &= \frac{4}{13}\left[-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x\right] + C \\
 &= \frac{1}{13}e^{3x}(3\sin 2x - 2\cos 2x) + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 6

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$u = \ln x$$

$$v = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

Ejercicio 7

$$\int \arccot x dx$$

$$u = \arccot x$$

$$v = x$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = dx$$

$$\int \arccot x dx = x \arccot x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\text{Sustitución: } v = 1 + x^2 \quad dv = 2x dx \quad dx = \frac{dv}{2x}$$

$$\begin{aligned}
 &= x \operatorname{arc} \cot gx - \int \frac{x}{v} \frac{dv}{2x} = x \operatorname{arc} \cot gx - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} \\
 &= x \operatorname{arc} \cot gx - \frac{1}{2} \ln|v| + C = x \operatorname{arc} \cot gx - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 8

$$\begin{aligned}
 &\int (x^2 + 3)3x^2 dx \\
 u &= x^2 + 3 & v &= x^3 \\
 du &= 2x dx & dv &= 3x^2 dx \\
 \int (x^2 + 3)3x^2 dx &= (x^2 + 3)x^3 - \int x^3(2x dx) \\
 &= x^5 + 3x^3 - 2 \int x^4 dx = x^5 + 3x^3 - 2 \frac{x^5}{5} + C \\
 &= \frac{3}{5}x^5 + 3x^3 + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{Sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \\
 u &= \operatorname{arc} \operatorname{Sen} \sqrt{x} & v &= 2\sqrt{x} \\
 du &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} & dv &= \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{Sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{Sen} \sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2} \\
 &= 2\sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{Sen} \sqrt{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Sustitución sea: } t = 1 - x \quad dt = -dx \quad dx = -dt$$

$$= 2\sqrt{x} \operatorname{arc Sen} \sqrt{x} - \int \frac{dt}{t^{1/2}} = 2\sqrt{x} \operatorname{arc Sen} \sqrt{x} + \int t^{-1/2} dt$$

$$= 2\sqrt{x} \operatorname{arc Sen} \sqrt{x} + \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} \operatorname{arc Sen} \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$$

Solución de ejercicios propuestos sobre Integrales Trigonométricas

Ejercicio 1

$$\int \text{Sen}^2 4x dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \text{Cos} 8x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{\text{Sen} 8x}{8} + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \text{Sen} 8x + C$$

Ejercicio 2

$$\int \text{Cos}^5 x dx$$

$$= \int \text{Cos}^4 x \text{Cos} x dx = \int (1 - \text{Sen}^2 x)^2 \text{Cos} x dx = \int (1 - \text{Sen}^2 x + \text{Sen}^4 x) \text{Cos} x dx$$

$$= \int \text{Cos} x dx - 2 \int \text{Sen}^2 x \text{Cos} x dx + \int \text{Sen}^4 x \text{Cos} x dx$$

$$\text{Sea: } u = \text{Sen} x \quad du = \text{Cos} x dx$$

$$= \text{Sen} x - 2 \int u^2 du + \int u^4 du = \text{Sen} x - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \text{Sen} x - \frac{2}{3} \text{Sen}^3 x + \frac{1}{5} \text{Sen}^5 x + C$$

Ejercicio 3

$$\int \text{Sen}^3 3x dx$$

$$= \int \text{Sen } 3x (1 - \text{Cos}^2 3x) = \int \text{Sen } 3x dx - \int \text{Cos}^2 3x \text{ Sen } 3x dx$$

$$u = \text{Cos } 3x \quad du = -3 \text{Sen } 3x dx$$

$$= -\frac{1}{3} \text{Cos } 3x - \left(-\frac{1}{3}\right) \int u^2 du = -\frac{1}{3} \text{Cos } 3x + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{u^3}{3}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3} \text{Cos } 3x + \frac{1}{9} \text{Cos}^3 3x + C$$

Comprobación

$$-\frac{1}{3} 3(-\text{Sen } 3x) + \frac{1}{9} (3 \text{Cos}^2 3x \cdot (-\text{Sen } 3x)(3))$$

$$= \text{Sen } 3x - \text{Sen } 3x \text{Cos}^2 3x = \text{Sen } 3x (1 - \text{Cos}^2 3x) = \text{Sen}^3 3x$$

Ejercicio 4

$$\int \text{Cos}^4 x dx$$

$$\int \text{Cos}^4 x dx = \int (\text{Cos}^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2} (1 + \text{Cos } 2x) \right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \text{Cos } 2x + \text{Cos}^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left[1 + 2 \text{Cos } 2x + \frac{1}{2} (1 + \text{Cos } 4x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \text{Cos } 2x dx + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \text{Cos } 4x dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \text{Sen } 2x + \frac{1}{8} x + \left(\frac{1}{32}\right) \text{Sen } 4x + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\text{Sen}2x + \frac{1}{32}\text{Sen}4x + C$$

Ejercicio 5

$$\int \text{Sen}^5 x \text{Cos}^2 x dx$$

$$= \int \text{Sen} x \text{Sen}^4 x \text{Cos}^2 x dx = \int \text{Sen} x (1 - \text{Cos}^2 x)^2 \text{Cos}^2 x dx$$

$$= \int \text{Sen} x (1 - 2\text{Cos}^2 x + \text{Cos}^4 x) \text{Cos}^2 x dx$$

$$= \int (\text{Cos}^2 x \text{Sen} x dx - 2\text{Cos}^4 x \text{Sen} x dx + \text{Cos}^6 x \text{Sen} x) dx$$

$$u = \text{Cos} x \quad du = -\text{Sen} x dx$$

$$- \int u^2 du + 2 \int u^4 du - \int u^6 du = -\frac{u^3}{3} + 2\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\text{Cos}^3 x + \frac{2}{5}\text{Cos}^5 x - \frac{1}{7}\text{Cos}^7 x + C$$

Ejercicio 6

$$\int \text{Sen}^2 x \text{Cos}^2 x dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}2x) \frac{1}{2}(1 + \text{Cos}2x) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \text{Cos}^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \text{Sen}^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}4x) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \text{Cos}4x dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} \frac{\text{Sen}4x}{4} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\text{Sen}4x + C$$

Ejercicio 7

$$\int \text{Sen}^4 3x \text{Cos}^2 3x dx$$

$$= \int \text{Sen}^2 3x \text{Sen}^2 3x \text{Cos}^2 3x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \text{Cos} 6x) \frac{1}{2}(1 - \text{Cos} 6x) \frac{1}{2}(1 + \text{Cos} 6x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \text{Cos} 6x)(1 - \text{Cos}^2 6x) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \text{Cos}^2 6x - \text{Cos} 6x + \text{Cos}^3 6x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 + \text{Cos} 12x) dx - \frac{1}{8} \int \text{Cos} 6x dx + \frac{1}{8} \int \text{Cos} 6x \text{Cos}^2 6x dx$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \text{Cos} 12x dx - \frac{1}{8} \int \text{Cos} 6x dx + \frac{1}{8} \int \text{Cos} 6x (1 - \text{Sen}^2 6x) dx$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \frac{\text{Sen} 12x}{12} - \frac{1}{8} \frac{\text{Sen} 6x}{6} + \frac{1}{8} \int \text{Cos} 6x dx - \frac{1}{8} \int \text{Cos} 6x \text{Sen}^2 6x dx$$

Sea $u = \text{Sen} 6x$; $du = 6 \text{Cos} 6x$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{\text{Sen} 12x}{192} - \frac{\text{Sen} 6x}{48} + \frac{\text{Sen} 6x}{48} - \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{6} du$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{\text{Sen} 12x}{192} - \frac{1}{48} \frac{u^3}{3} = \frac{1}{16} x - \frac{\text{Sen} 12x}{192} - \frac{\text{Sen}^3 6x}{144} + C$$

Ejercicio 8

$$\int \text{Cos} 3x \text{Cos} 2x dx$$

$$\text{Cos}^m 3x \text{Cos}^n 2x = \frac{1}{2} [\text{Cos} 5x + \text{Cos} x]$$

$$= \frac{1}{2} \int \text{Cos} 5x dx + \text{Cos} x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Sen} 5x}{5} - \text{Sen} x \right] = \frac{1}{10} \text{Sen} 5x + \frac{1}{2} \text{Sen} x + C$$

Ejercicio 9

$$\begin{aligned} & \int \text{Sen } 3x \text{ Cos } 5x \\ &= \frac{1}{2} \int [\text{Sen } 8x + \text{Sen } (-2x)] dx = \frac{1}{2} \int \text{Sen } 8x \, dx - \frac{1}{2} \int \text{Sen } 2x \, dx \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{8}\right) (-\text{Cos } 8x) - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (-\text{Cos } 2x) + C = -\frac{1}{16} \text{Cos } 8x + \frac{1}{4} \text{Cos } 2x + C \end{aligned}$$

Ejercicio 10

$$\begin{aligned} & \int \text{tg}^4 x \, dx \\ & \int \text{tg}^2 x \, \text{tg}^2 x \, dx = \int (\text{Sec}^2 x - 1) \text{tg}^2 x \, dx = \int \text{tg}^2 x \text{Sec}^2 x \, dx - \int \text{tg}^2 x \, dx \\ \text{Sea: } & u = \text{tg} x \quad du = \text{Sec}^2 x \quad \int u^2 du - \int (\text{Sec}^2 x - 1) dx \\ & \int u^2 du - \int \text{Sec}^2 x \, dx + \int dx = \frac{u^3}{3} - \text{tg} x + x = \frac{\text{tg}^3 x}{3} - \text{tg} x + x + C \end{aligned}$$

Ejercicio 11

$$\begin{aligned} & \int \text{Cotg}^4 x \, dx \\ &= \int \text{Cotg}^2 x \, \text{Cotg}^2 x \, dx = \int \text{Cotg}^2 x (\text{Cosc}^2 x - 1) dx = \int (\text{Cotg}^2 x \text{Cosc}^2 x - \text{Cotg}^2 x) dx \\ &= \int \text{Cotg}^2 x \text{Cosc}^2 x \, dx - \int \text{Cotg}^2 x \, dx \quad u = \text{Cotg} x: du = -\text{Cosc}^2 x \, dx \\ &= - \int u^2 du - \int (\text{Cosc}^2 x - 1) dx = - \int u^2 du - \int \text{Cosc}^2 x \, dx + \int dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \text{Cot}gx + x + C = -\frac{\text{Cot}g^3x}{3} + \text{Cot}gx + x + C$$

Ejercicio 12

$$\int \text{tg}^4x \text{Sec}^4x dx$$

$$= \int \text{tg}^4x \text{Sec}^2x \text{Sec}^2x dx = \int \text{tg}^4x(\text{tg}^2x + 1)\text{Sec}^2x dx$$

$$= \int \text{tg}^4x \text{tg}^2x \text{Sec}^2x dx + \int \text{tg}^4x \text{Sec}^2x dx$$

$$= \int \text{tg}^6x \text{Sec}^2x dx + \int \text{tg}^4x \text{Sec}^2x dx \quad u = \text{tg}x \quad du = \text{Sec}^2x dx$$

$$= \int u^6 du + \int u^4 du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{\text{tg}^7x}{7} + \frac{\text{tg}^5x}{5} + C$$

Ejercicio 13

$$\int \text{Cot}g^3x \text{Csc}^4x dx$$

$$\text{Csc}^2x = 1 + \text{Cot}g^2x$$

$$= \int \text{Cot}g^3x(1 + \text{Cot}g^2x) \text{Csc}^2x dx = \int \text{Cot}g^3x \text{Csc}^2x dx + \int \text{Cot}g^5x \text{Csc}^2x dx$$

$$u = \text{Cot}gx \quad du = -\text{Csc}^2x dx$$

$$= -\int u^3 du - \int u^5 du = -\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + C = -\frac{\text{Cot}g^4x}{4} - \frac{\text{Cot}g^6x}{6} + C$$

Ejercicio 14

$$\int \sqrt{\text{tg}x \text{Sec}^4x} dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^{1/2} x \operatorname{Sec}^4 x \, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^{1/2} x \operatorname{Sec}^2 x \operatorname{Sec}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^{1/2} (1 + \operatorname{tg}^2 x) \operatorname{Sec}^2 x \, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^{1/2} x \operatorname{Sec}^2 x \, dx + \int \operatorname{tg}^{5/2} x \operatorname{Sec}^2 x \, dx \quad u = \operatorname{tg} x \quad du = \operatorname{Sec}^2 x \, dx$$

$$= \int u^{1/2} du + \int u^{5/2} du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^{(3/2)} x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^{(7/2)} x + C$$

Solución de ejercicios propuestos sobre Sustitución Trigonométrica

Ejercicio 1

$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{16}{16}(25-16x^2)}}{x} dx = \int \frac{4\sqrt{\frac{25}{16}-x^2}}{x} dx$$

$$a^2 = \frac{25}{16} \rightarrow a = \frac{5}{4} \quad x = \frac{5}{4} \text{Sen}\phi \quad dx = \frac{5}{4} \text{Cos}\phi d\phi$$

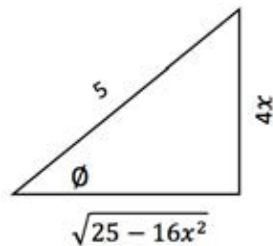
$$= 4 \int \frac{\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{25}{16}\text{Sen}^2\phi}}{\frac{5}{4}\text{Sen}\phi} \frac{5}{4} \text{Cos}\phi d\phi$$

$$= 4 \int \frac{\text{Cos}\phi}{\text{Sen}\phi} \sqrt{\frac{25}{16}(1-\text{Sen}^2\phi)} d\phi$$

$$= 4 \int \frac{\text{Cos}\phi}{\text{Sen}\phi} \frac{5}{4} \text{Cos}\phi d\phi = 5 \int \frac{\text{Cos}^2\phi}{\text{Sen}\phi} d\phi$$

$$= 5 \int \frac{(1-\text{Sen}^2\phi)}{\text{Sen}\phi} d\phi = 5 \int \frac{1}{\text{Sen}\phi} d\phi - 5 \int \text{Sen}\phi d\phi$$

$$= 5 \int \text{Csc}\phi d\phi - 5 \int \text{Sen}\phi d\phi = 5 \ln|\text{Csc}\phi - \text{Cotg}\phi| + 5\text{Cos}\phi + C$$



Del triángulo rectángulo podemos obtener la siguiente relación:

$$\csc\phi = \frac{5}{4x}; \cot\phi = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}; \cos\phi = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Reemplazando estos valores se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x} dx &= 5 \ln \left| \frac{5}{4x} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x} \right| + 5 \left(\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5} \right) + C \\ &= 5 \ln \left| \frac{5 - \sqrt{25-16x^2}}{4x} \right| + \sqrt{25-16x^2} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

$$a = 1 \quad x = \text{Sen } t \quad dx = \text{Cos } t \, dt$$

$$\int \frac{\text{Sen}^4 t}{\sqrt{(1-\text{Sen}^2 t)^3}} \text{Cos } t \, dt = \int \frac{\text{Sen}^4 t}{\sqrt{(\text{Cos}^2 t)^3}} \text{Cos } t \, dt = \int \frac{\text{Sen}^4 t}{\text{Cos}^3 t} \text{Cos } t \, dt$$

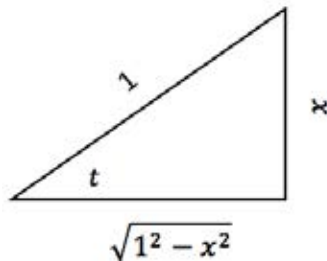
$$\int \frac{\text{Sen}^4 t}{\text{Cos}^2 t} dt = \int \frac{(1-\text{Cos}^2 t)^2}{\text{Cos}^2 t} dt = \int \frac{1-2\text{Cos}^2 t + \text{Cos}^4 t}{\text{Cos}^2 t} dt$$

$$\int \frac{1}{\text{Cos}^2 t} - 2 \int dt + \int \text{Cos}^2 t \, dt = \int \text{Sec}^2 t \, dt - 2 \int dt + \int \frac{1}{2}(1 + \text{Cos} 2t) dt$$

$$= \text{tg } t - 2t + \frac{1}{2}t + \frac{\text{Sen } 2t}{4} + C$$

$$= \text{tg } t - \frac{3}{4}t + 2 \frac{\text{Sen } t \text{Cos } t}{4} + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{4} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$



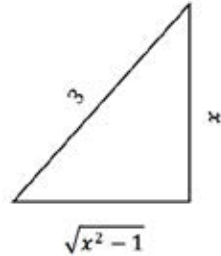
Ejercicio 3

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$$

$$x = 3 \operatorname{Sen} \theta \quad dx = 3 \operatorname{Cos} \theta \, d\theta \quad \operatorname{Sen} \theta = \frac{x}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \operatorname{Cos} \theta \, d\theta}{9 \operatorname{Sen}^2 \theta \sqrt{9-9 \operatorname{Sen}^2 \theta}} &= \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{Cos} \theta \, d\theta}{\operatorname{Sen}^2 \theta \, 3 \sqrt{1-\operatorname{Sen}^2 \theta}} = \frac{1}{9} \int \frac{\operatorname{Cos} \theta \, d\theta}{\operatorname{Sen}^2 \theta \operatorname{Cos} \theta} \\ &= \frac{1}{9} \int \operatorname{Csc}^2 \theta \, d\theta = -\frac{1}{9} \operatorname{Cot} \theta + C \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$



Ejercicio 4

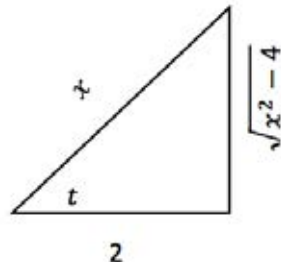
$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$$

$$x = 2 \operatorname{Sec} t \quad dx = 2 \operatorname{Sec} t \operatorname{tg} t \, dt$$

$$\int \frac{\sqrt{4 \operatorname{Sec}^2 t - 4}}{2 \operatorname{Sec} t} 2 \operatorname{Sec} t \operatorname{tg} t \, dt = \int \frac{\sqrt{4(\operatorname{Sec}^2 t - 1)}}{1} \operatorname{tg} t \, dt$$

$$\begin{aligned} \int 2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 t} \operatorname{tg} t \, dt &= 2 \int \operatorname{tg}^2 t \, dt = 2 \int (\operatorname{Sec}^2 t - 1) \, dt = 2 \int \operatorname{Sec}^2 t \, dt - 2 \int dt \\ &= 2 \operatorname{tg} t - 2t + C = 2 \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \left(\frac{2}{x} \right) + C \end{aligned}$$

$$R: \sqrt{x^2-4} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{Sec} \frac{x}{2} + C$$



Ejercicio 5

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$= \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{\frac{9}{9}(4-9x^2)}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9(\frac{4}{9}-\frac{9}{9}x^2)}} = \int \frac{x^3 dx}{3\sqrt{(\frac{4}{9}-x^2)}}$$

$$a^2 = \frac{4}{9} \rightarrow a = \frac{2}{3} \quad x^2 = \frac{4}{9} \text{Sen}^2 t \rightarrow x = \frac{2}{3} \text{Sen} t \quad dx = \frac{2}{3} \text{Cost} dt$$

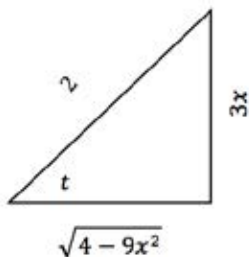
$$= \frac{1}{3} \int \frac{\frac{8}{27} \text{Sen}^3 t}{\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{4}{9} \text{Sen}^2 t}} \frac{2}{3} \text{Cost} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{\text{Sen}^3 t}{\sqrt{\frac{4}{9}(1-\text{Sen}^2 t)}} \text{Cost} dt$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{\text{Sen}^3 t}{\frac{2}{3} \text{Cost}} \text{Cost} dt = \frac{8}{81} \int \text{Sen}^3 t dt$$

$$= \frac{8}{81} \int \text{Sen}^2 t \text{Sen} t dt = \frac{8}{81} \int (1 - \text{Cos}^2 t) \text{Sen} t dt =$$

Sea: $u = \text{Cos} t \quad du = -\text{Sen} t dt$

$$= \frac{8}{81} \int \text{Sen} t dt - \frac{8}{81} \int \text{Cos}^2 t \text{Sen} t dt = -\frac{8}{81} \text{Cost} + \frac{8}{81} \frac{\text{Cos}^3 t}{3} + C$$



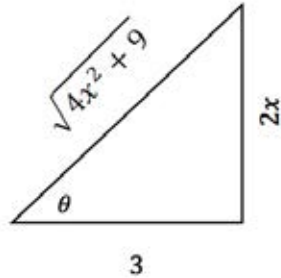
$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-9x^2}} = -\frac{8}{81} \frac{\sqrt{4-9x^2}}{2} + \frac{8}{243} \left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right)^3 + C$$

$$\frac{8}{81} \frac{\sqrt{4-9x^2}}{2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right)^2 - 1 \right] + C$$

Ejercicio 6

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$$

$$x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \theta \quad dx = \frac{3}{2} \operatorname{Sec}^2 \theta d\theta$$



$$\int \frac{\frac{3}{2} \operatorname{Sec}^2 \theta d\theta}{\frac{3}{2} \operatorname{tg} \theta \sqrt{9+4\left(\frac{9}{4} \operatorname{tg}^2 \theta\right)}} = \int \frac{\operatorname{Sec}^2 \theta d\theta}{\operatorname{tg} \theta \sqrt{9+9 \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{Sec}^2 \theta d\theta}{\operatorname{tg} \theta \operatorname{Sec} \theta}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{Sec} \theta d\theta}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\operatorname{Cos} \theta} \frac{\operatorname{Cos} \theta}{\operatorname{Sen} \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int \operatorname{Csc} \theta d\theta$$

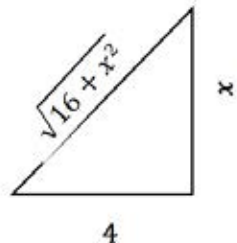
$$= \frac{1}{3} \ln |\operatorname{Csc} \theta - \operatorname{Cot} \theta| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x} - \frac{3}{2x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x} \right| + C$$

Ejercicio 7

$$\int \frac{dx}{(16+x^2)^4}$$

$$x = 4 \operatorname{tg} \theta \quad dx = 4 \operatorname{Sec}^2 \theta d\theta$$

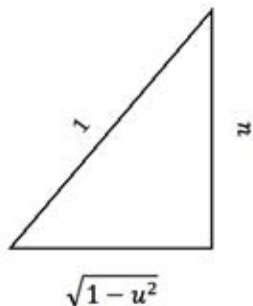


$$\begin{aligned}
 \int \frac{4 \sec^2 \theta \, d\theta}{(\sqrt{16 + 16 \tan^2 \theta})^4} &= 4 \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{4 \sec^4 \theta} = \frac{1}{64} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{64} \int \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{64} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{128} \int d\theta + \frac{1}{128} \int \cos 2\theta \, d\theta \\
 \frac{1}{128} \theta + \frac{1}{256} \sin 2\theta + C &= \frac{1}{128} \theta + \frac{1}{256} (2 \sin \theta \cos \theta) + C \\
 \frac{\theta}{128} + \frac{1}{128} \sin \theta \cos \theta + C &= \frac{1}{128} \left(\arctan \frac{x}{4} + \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{16 + x^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{128} \left(\arctan \frac{x}{4} + \frac{4x}{16 + x^2} \right) + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 8

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - (x^3 - 2x - 1)}} dx$$



completando “cuadrados”

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} dx$$

$$\text{Sea: } u = x-1 \quad du = dx$$

$$x = u + 1 \rightarrow x^2 = u^2 + 2u + 1$$

$$\int \frac{u^2 + 2u + 1}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

Aplicando caso Sust. Trigonométrica

$$u = \sin t \quad du = \cos t \, dt$$

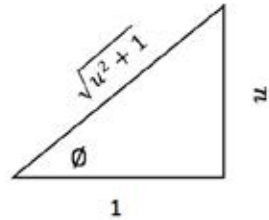
$$= \int \frac{\sin^2 t + 2 \sin t + 1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cos t \, dt = \int \sin^2 t \, dt + 2 \int \sin t \, dt + \int dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt + 2 \int \sin t dt + \int dt \\
 &= \frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \cos 2t dt + 2 \int \sin t dt + \int dt = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2} - 2\cos t + C \\
 &= \frac{3}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t - 2\cos t + C = \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}(2\sin t \cos t) - 2\cos t + C \\
 &= \frac{3}{2} \arcsin u - \frac{1}{2}u \frac{\sqrt{1-u^2}}{1} - 2 \frac{\sqrt{1-u^2}}{1} + C \\
 &= \frac{3}{2} \arcsin(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} - 2\sqrt{1-(x-1)^2} + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}} dx \quad u = e^x \quad du = e^x dx$$



$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \quad a = 1; \quad u = 1 \tan \phi; \quad du = \sec^2 \phi d\phi$$

$$\int \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sqrt{1+\tan^2 \phi}} = \int \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sqrt{\sec^2 \phi}} = \int \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sec \phi}$$

$$\int \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sqrt{1+\tan^2 \phi}} = \int \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sqrt{\sec^2 \phi}} = \int \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sec \phi}$$

$$\int \sec \phi d\phi = \ln |\sec \phi + \tan \phi| + C$$

$$\tan \phi = \frac{u}{1} \quad \int \sec \phi d\phi = \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+1}}{1} + u \right| + C$$

$$= \ln \left| \sqrt{e^{2x} + 1} + e^x \right| + C$$

Ejercicio 10

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\int \frac{dx}{[(1+x^2)^{1/2}]^4} = \int \frac{dx}{(\sqrt{1+x^2})^4}$$

$$x = \operatorname{tg} \theta \quad dx = \operatorname{Sec}^2 \theta \, d\theta$$

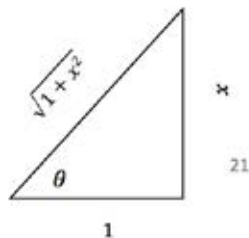
$$= \int \frac{\operatorname{Sec}^2 \theta \, d\theta}{(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta})^4} = \int \frac{\operatorname{Sec}^2 \theta \, d\theta}{\operatorname{Sec}^4 \theta} = \int \frac{d\theta}{\operatorname{Sec}^2 \theta} = \int \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int \theta \, d\theta + \frac{1}{2} \int \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} (2 \sin \theta \cos \theta) + C = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + C$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C$$

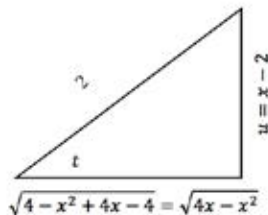


Ejercicio 11

$$\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{[(-x^2 + 4x - 4) + 4]^{3/2}} = \int \frac{dx}{[4 - (x^2 - 4x + 4)]^{3/2}}$$

$$= \int \frac{dx}{[4 - (x-2)^2]^{3/2}} \quad \text{Sea } u = x-2 \quad du = dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{du}{[4 - u^2]^{3/2}} \quad u = 2\text{Sent} \quad du = 2\text{Cost} dt \\
 &= \int \frac{2\text{Cost} dt}{(\sqrt{4 - 4\text{Sen}^2 t})^3} = 2 \int \frac{\text{Cost} dt}{(2\sqrt{1 - \text{Sen}^2 t})^3} = \frac{2}{8} \int \frac{\text{Cost} dt}{\text{Cos}^3 t} \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\text{Cos}^2 t} = \frac{1}{4} \int \text{Sec}^2 t dt = \frac{1}{4} t \text{gt} + C = \frac{1}{4} \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 12

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} \\
 &= \int \frac{dx}{\left[4\left(x^2 - 6x + \frac{27}{4}\right)\right]^{3/2}} \\
 &= \int \frac{dx}{\left[4(x^2 - 6x + 9) - 36 + \frac{4 \cdot 27}{4}\right]^{3/2}} = \int \frac{dx}{[4(x-3)^2 - 9]^{3/2}} \\
 &4(x-3)^2 = 9\text{Sec}^2 t \rightarrow 2(x-3) = 3\text{Sect} \rightarrow x-3 = \frac{3}{2}\text{Sect} \rightarrow dx = \frac{3}{2}\text{Sect} t \text{gt} dt \\
 &= \int \frac{\frac{3}{2}\text{Sect} t \text{gt} dt}{(\sqrt{9\text{Sec}^2 t - 9})^3} = \frac{3}{2} \int \frac{\text{Sect} t \text{gt} dt}{(\sqrt{9\text{Sec}^2 t - 9})^3} = \frac{3}{2} \int \frac{\text{Sect} t \text{gt} dt}{(3\sqrt{tg^2 t})^3} = \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{\text{Sect} t \text{gt} dt}{27 tg^3 t} = \frac{1}{18} \int \frac{\text{Sect} dt}{tg^2 t} = \frac{1}{18} \int \frac{1}{\text{Cost}} \frac{\text{Cos}^2 t}{\text{Sen}^2 t} dt = \frac{1}{18} \int \frac{\text{Cost}}{\text{Sen}^2 t} dt \\
 &u = \text{Sent} \quad du = \text{Cost} dt \\
 &= \frac{1}{18} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{18} \int u^{-2} du = \frac{1}{18} \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{18} \frac{1}{\text{Sent}} + C \\
 &= -\frac{1}{18} \frac{2(x-3)}{\sqrt{(4x^2 - 24x + 27)}} = -\frac{1}{9} \frac{x-3}{\sqrt{(4x^2 - 24x + 27)}} + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 13

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx$$

Sustitución $x = a \operatorname{Sect} \quad a = 1$

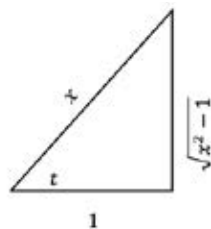
$$x = \operatorname{Sect} \quad dx = \operatorname{Sect} \operatorname{tgt} dt$$

$$= \int \frac{\operatorname{Sect} \operatorname{tgt} dt}{\operatorname{Sec}^2 t - 1} = \int \frac{\operatorname{Sect} \operatorname{tgt} dt}{\operatorname{tgt}^2} = \int \frac{\operatorname{Sect}}{\operatorname{tgt}} dt = \int \frac{1}{\operatorname{Cost}} \frac{\operatorname{Cost}}{\operatorname{Sent}} dt$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{Sent}} dt = \int \operatorname{Csct} dt = \ln |\operatorname{Csct} - \operatorname{Cotg} t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right| + C = \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} \right| + C = \ln \left| \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)} \right| = \ln \left| \frac{x^2-1}{x+1} \right|$$



Ejercicio 14

$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x - \ln^2 x}}$$

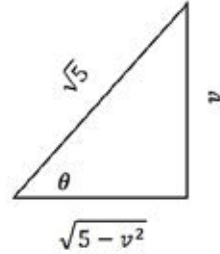
Sea: $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{1-4u-u^2}} = \int \frac{u du}{5 - (-5 + 1 - 4u - u^2)} = \int \frac{u du}{\sqrt{5 + (-4 - 4u - u^2)}}$$

$$= \int \frac{u du}{\sqrt{5 - (4 + 4u + u^2)}} = \int \frac{u du}{\sqrt{5 - (2+u)^2}}$$

Sea: $v = 2 + u \quad dv = du \quad u = v - 2$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{(v-2)dv}{\sqrt{5-(4+4u+u^2)}} = \int \frac{v dv}{\sqrt{5-v^2}} - 2 \int \frac{dv}{\sqrt{5-v^2}} \\
 v &= \sqrt{5} \operatorname{Sen} \theta & dv &= \sqrt{5} \operatorname{Cos} \theta d\theta \\
 &= \int \frac{\sqrt{5} \operatorname{Sen} \theta \sqrt{5} \operatorname{Cos} \theta d\theta}{\sqrt{5-5 \operatorname{Sen}^2 \theta}} - 2 \int \frac{\sqrt{5} \operatorname{Cos} \theta d\theta}{\sqrt{5-5 \operatorname{Sen}^2 \theta}} \\
 &= \int \frac{5 \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta d\theta}{\sqrt{5(1-\operatorname{Sen}^2 \theta)}} - 2 \int \frac{\sqrt{5} \operatorname{Cos} \theta d\theta}{\sqrt{5(1-\operatorname{Sen}^2 \theta)}} \\
 &= \frac{5}{\sqrt{5}} \int \frac{\operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta d\theta}{\operatorname{Cos} \theta} - 2 \int d\theta = \frac{5}{\sqrt{5}} (-\operatorname{Cos} \theta) - 2\theta + C \\
 &= -\frac{5}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5-v^2}}{\sqrt{5}} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{Sen} \frac{v}{\sqrt{5}} \\
 &= -\sqrt{5-2+u} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{Sen} \left(\frac{2+u}{\sqrt{5}} \right) \\
 &= -\sqrt{3+\ln x} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{Sen} \left(\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}} \right) + C
 \end{aligned}$$

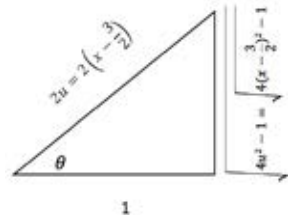


Ejercicio 15

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} \\
 &= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+2}} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Sea: } u = x - \frac{3}{2} \rightarrow du = dx \rightarrow x = u + \frac{3}{2}$$

$$\int \frac{du}{\left(u+\frac{3}{2}-1\right)\sqrt{u^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)\sqrt{u^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$



$$\text{Sea: } u = \frac{1}{2} \sec \theta \rightarrow du = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta}{\left(\frac{1}{2} \sec \theta + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{1}{4} \sec^2 \theta - \frac{1}{4}\right)}} &= \frac{1}{2} \int \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta}{\frac{1}{2} (\sec \theta + 1) \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta} = 2 \int \frac{\sec \theta d\theta}{\sec \theta + 1} \\ 2 \int \frac{\sec \theta (\sec \theta - 1) d\theta}{(\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)} &= 2 \int \frac{\sec \theta (\sec \theta - 1) d\theta}{\sec^2 \theta - 1} \\ = 2 \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} - 2 \int \frac{\sec \theta d\theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} &= 2 \int \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta - 2 \int \frac{1}{\cos \theta} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \\ = 2 \int \operatorname{Cosec}^2 \theta d\theta - 2 \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta &= 2 \int \cos^2 \theta d\theta - 2 \int \frac{du}{u^2} \end{aligned}$$

$$u = \sin \theta \quad du = \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} = 2(-\operatorname{Cotg} \theta) + 2 \frac{u^{-1}}{-1} + C &= -2 \operatorname{Cotg} \theta + \frac{2}{\sin \theta} + C = -2 \operatorname{Cotg} \theta + \frac{2}{\sin \theta} + C \\ = -2 \operatorname{Cotg} \theta + 2 \cos \theta + C &= -2 \frac{1}{\sqrt{4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1}} + 2 \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1}} + C \end{aligned}$$

Solución de ejercicios propuestos sobre fracciones parciales

Ejercicio 1

$$\int \frac{dx}{x^2-4}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)}$$

$$\text{Caso 1: } \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$\text{Para } x = -2 \rightarrow 1 = -2B - 2B \quad 1 = -4B \rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Para } x = +2 \rightarrow 1 = 2A + 2A \quad 1 = 4A \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-4} &= \int \frac{\frac{1}{4}dx}{x-2} + \int \frac{-\frac{1}{4}dx}{x+2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C = \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \right] \end{aligned}$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx$$

$$\text{Caso 1 } \frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

$$x+3 = A(x-1) + B(x-2) \quad \text{Para } x=1 \quad 1+3 = -B \rightarrow B = -4$$

$$\text{Para } x=2 \quad 2+3 = A \rightarrow A = 5$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx = 5 \int \frac{dx}{x-2} - 4 \int \frac{dx}{x-1} = 5 \ln|x-2| - 4 \ln|x-1| + C$$

Ejercicio 3

$$\int \frac{5x \, dx}{2x^3 + 6x^2}$$

$$\text{Casos 1 y 2 } \frac{5x}{x^2(2x+6)} = \frac{A}{2x+6} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$$5x = Ax^2 + Bx(2x+6) + C(2x+6)$$

$$= Ax^2 + 2Bx^2 + 6Bx + 2Cx + 6C$$

$$= (A+2B)x^2 + (6B+2C)x + 6C$$

$$A+2B = 0 \quad C = 0$$

$$6B+2C = 5 \quad B = \frac{5}{6}$$

$$6C = 0 \quad A = -\frac{5}{3}$$

$$\int \frac{5x dx}{2x^3 + 6x^2} = -\frac{5}{3} \int \frac{dx}{2x+6} + \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x} \quad \text{sea } u = 2x+6 \quad du = 2dx$$

$$\int \frac{5x dx}{2x^3 + 6x^2} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{5}{6} \ln|2x+6| + \frac{5}{6} \ln x + C = \frac{5}{6} (\ln x - \ln|2x-6|) = \frac{5}{6} \ln \left| \frac{x}{2x+6} \right|$$

Comprobación

$$\frac{5}{6} \frac{1}{\frac{x}{2x+6}} \cdot \frac{(2x+6)(1)-(x)(2)}{(2x+6)^2} = \frac{5}{6} \frac{1}{x} \frac{2x+6-2x}{2x+6} = \frac{5}{2x^2+6x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{5x}{2x^3+6x^2}$$

Ejercicio 4

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - - x - 1 \quad | \quad x^3 - x^2 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ - x^2 - x - 1 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x + \frac{-x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x + 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x + 1}{x^2(x-1)}$$

$$\frac{x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$x + 1 = (A + C)x^2 + (B - A)x - B \rightarrow A + C = 0$$

$$B - A = 1$$

$$-B = 1 \quad B = -1; A = -2; C = 2$$

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx = \int x dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$$

Ejercicio 5

$$\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 6}$$

$$\frac{1}{x^2 + 7x + 6} = \frac{1}{(x+6)(x+1)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x+6) \quad \text{Para: } x = -1 \quad 1 = 5B \rightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$\text{Para: } x = -6 \quad 1 = -5A \rightarrow A = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+7x+6} &= -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+6} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{5} \ln|x+6| + \frac{1}{5} \ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+1}{x+6} \right| + C \end{aligned}$$

Ejercicio 6

$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+4} dx$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\text{Para: } x = 2 \quad 2+3 = B \rightarrow B = 5$$

$$\text{Para: } x = 0 \quad 3 = -2A + B$$

$$3 = -2A + 5 \quad A = 1$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{5dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

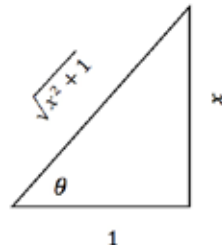
Comprobación

$$\frac{1}{x-2} - \frac{(x-2)(0)-5(1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2+5}{(x-2)^2} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{x+3}{x^2-4x+4}$$

Ejercicio 7

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4+2x^2+1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{x^4}{-x^4-2x^2-1} \quad \frac{|x^4+2x^2+1|}{1} \\ &- \quad -2x^2-1 \end{aligned}$$



$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = \int \left[1 - \frac{2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} \right] dx$$

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

$$2x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)$$

$$2x^2 + 1 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D \rightarrow Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D$$

$$A = 0; B = 2; A + C = 0 \rightarrow C = 0; B + D = 1 \rightarrow D = -1$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = \int dx - \int \frac{0x + 2}{x^2 + 1} - \int \frac{0x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$= \int dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = x - 2 \arctan(x) - \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1})^4}$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1})^4} \quad x = \tan \theta \quad dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sqrt{\tan^2 \theta + 1})^4} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^4} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} = \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta}$$

$$\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \arctan x + \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = x - 2 \arctan x - \frac{1}{2} \arctan x - \frac{x}{x^2 + 1} + C$$

$$= x - \frac{3}{2} \arctan x - \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C$$

Ejercicio 8

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1) + B}{(x-1)^2}$$

$$2x+1 = Ax-A+B \rightarrow A=2; \quad B-A=1 \quad B=3$$

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

Ejercicio 9

$$\int \frac{5x^2-42x+35}{(6x+5)(x-3)^2} dx$$

$$\frac{5x^2-42x+35}{(6x+5)(x-3)^2} = \frac{A}{6x+5} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$5x^2-42x+35 = A(x-3)^2 + B(6x+5)(x-3) + C(6x+5)$$

$$\text{Para } x=3$$

$$5(3)^2-42(3)+35 = A(0) + B(6(3)+5)(0) + C(6(3)+5)$$

$$45-126+35 = 23C \rightarrow C = -2$$

$$\text{Para } x = -\frac{5}{6}$$

$$5\left(-\frac{5}{6}\right)^2-42\left(-\frac{5}{6}\right)+35 = A\left(-\frac{5}{6}-3\right)^2$$

$$\frac{2645}{36} = A\left(\frac{529}{36}\right) \rightarrow A = 5$$

$$\text{Para } x=0$$

$$5(0)^2-42(0)+35 = A(-3)^2 + B(5)(-3) + C(5)$$

$$35 = 9A - 15B + 5C \quad \text{Reemplazamos } A \text{ y } C$$

$$35 = 45 - 15B + (-10) \quad 15B = 45 - 10 - 35 \rightarrow B = 0$$

$$\int \frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x + 5)(x-3)^2} dx = 5 \int \frac{dx}{6x + 5} - 2 \int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$\text{Sea: } u = 6x + 5 \quad du = 6dx \quad dx = \frac{du}{6} \quad v = x-3 \quad dv = dx$$

$$= 5 \int \frac{du/6}{u} - 2 \int \frac{dv}{v^2} = \frac{5}{6} \ln|6x + 5| + \frac{2}{x-3} + C$$

Ejercicio 10

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$$

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

$$= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + 2B + D$$

$$A + C = 1; \quad B + D = 1; \quad 2A + C = 1; \quad 2B + D = 2$$

$$A = 0; \quad B = 1; \quad C = 1; \quad D = 0$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{xdx}{x^2 + 2} = \arctan x + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C$$

Ejercicio 11

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} dx$$

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{B}{x^2+1}$$

$$6x^2-3x+1 = A(x^2+1) + (Bx+c)(4x+1)$$

$$\text{Escogiendo: } x = -\frac{1}{4}; \quad x = 0; \quad x = 1$$

$$\text{Para: } x = -\frac{1}{4}$$

$$6\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = A\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 1\right) + \left[B\left(-\frac{1}{4}\right) + C\right]\left[4\left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right]$$

$$6\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4} + 1 = A\left(\frac{1}{16}\right) + Ax + \left[B\left(-\frac{1}{4}\right) + C\right](0)$$

$$\frac{17}{8} = \frac{17}{16}A \rightarrow A = 2$$

$$\text{Para: } x = 0$$

$$6(0)^2 - 3(0) + 1 = A((0)^2 + 1) + [B(0) + C][4(0) + 1] \rightarrow 1 = A + C \rightarrow C = -1$$

$$\text{Para: } x = 1$$

$$6(1)^2 - 3(1) + 1 = A((1)^2 + 1) + [B(1) + C][4(1) + 1] \rightarrow 4 = 2A + (B-1)(5)$$

$$4 = 2(2) - 5B - 5$$

$$B = 1$$

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} dx = \int \frac{2x dx}{4x+1} + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx$$

$$u = 4x + 1 \rightarrow du = 4dx \rightarrow dx = \frac{du}{4}$$

$$= \int \frac{2x dx}{4x+1} + \int \frac{x dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$v = x^2 + 1 \rightarrow dv = 2x dx \rightarrow x dx = \frac{dv}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|4x + 1| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| - \arctan x + C$$

Ejercicio 12

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}$$

$$6x^2 - 15x + 22 = A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x + 3)(x^2 + 2) + (Dx + E)(x + 3)$$

$$\text{Para: } x = 0; x = -3; x = 1; x = -1; x = 2$$

$$x = 0;$$

$$6(0)^2 - 15(0) + 22 = A(0^2 + 2)^2 - [B(0) + C](0 + 3)(0^2 + 2) + (D(0) + E)(0 + 3)$$

$$22 = 4A + C(3)(2) + E(3) \rightarrow 4A + 6C + 3E = 22$$

$$x = -3$$

$$6(-3)^2 - 15(-3) + 22 = A((-3)^2 + 2)^2 + [B(-3) + C](0)[(-3)^2 + 2] + [D(-3) + E](0)$$

$$54 + 45 + 22 = 121A \rightarrow A = 1$$

$$x = 1$$

$$6 - 15 + 22 = A(1^2 + 2)^2 + [B(1) + C][(1 + 3)(1^2 + 2)] + [D(1) + E](1 + 3)$$

$$13 = 9A + (B + C)(12) + (D + E)(4)$$

$$13 = 9A + 12B + 12C + 4D + 4E$$

$$x = -1$$

$$6(-1)^2 - 15(-1) + 22 = A((-1)^2 + 2)^2 + [B(-1) + C][(-1 + 3)][(-1)^2 + 2] + [D(-1) + E][(-1 + 3)]$$

$$43 = 9A - 6B + 6C - 2D + 2E$$

$$x = 2$$

$$6(2)^2 - 15(2) + 22 = A((2)^2 + 2)^2 + (2B + C)(2 + 3)(4 + 2) + (2D + E)(2 + 3)$$

$$24 - 30 + 22 = 36A + (2B + C)(5)(6) + (2D + E)5$$

$$16 = 36A + 60B + 30C + 10D + 5E$$

Sistema de Ecuaciones:

$$4A + 6C + 3E = 22$$

$$A = 1$$

$$9A + 12B + 12C + 4D + 4E = 13$$

$$9A - 6B + 6C - 2D + 2E = -1$$

$$36A + 60B + 30C + 10D + 5E = 16$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene los siguientes resultados:

$$A = 1; B = -1; C = 3; D = -5; E = 0$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-x+3}{x^2+2} dx + \int \frac{-5x dx}{(x^2+2)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{x dx}{x^2+2} + \int \frac{3dx}{x^2+2} - \int \frac{5x dx}{(x^2+2)^2}$$

$$\text{Sea: } u = x + 3 \rightarrow du = dx \rightarrow v = x^2 + 2 \rightarrow dv = 2x dx \rightarrow x dx = \frac{dv}{2} \rightarrow$$

$$w = x^2 + 2 \rightarrow dw = 2x dx \rightarrow x dx = \frac{dw}{2}$$

$$= \ln|x+3| - \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2(x^2+2)} + C$$

Ejercicio 13

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$\frac{x^4}{-2x^2-1} = \frac{x^4}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = \int dx - \int \frac{2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$\frac{2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

$$2x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)$$

Seleccionando 4 valores de x : $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$; $x = 2$

Para: $x = 0$

$$1 = B(1)^2 + D \quad B + D = 1$$

Para: $x = 1$

$$2 + 1 = (A + B)(1^2 + 1) + (C + D)$$

$$3 = 2A + 2B + C + D \quad 2A + 2B + C + D = 3$$

Para: $x = -1$

$$3 = (-A + B)(2) + (-C + D) \quad -2A + 2B - C + D = 3$$

Para: $x = 2$

$$9 = (2A + B)(2^2 + 1) + (2C + D) \quad 10A + 5B + 2C + D = 9$$

Usando Gauss Jordan: $A = 0$; $B = 2$; $C = 0$; $D = -1$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = \int dx - \int \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = x - 2 \arctan x - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

$$x = 0 \rightarrow 1 = B(1) + D \quad B + D = 1$$

$$x = 1 \rightarrow 1 = (A + B)(2) + C + D \quad 2A + 2B + C + D = 1$$

$$x = -1 \rightarrow 1 = (-A + B)(2) - C + D \quad -2A + 2B - C + D = 1$$

$$x = 2 \rightarrow 1 = (2A + B)(5) + 2C + D \quad 10A + 5B + 2C + D = 1$$

Usando Gauss Jordan: $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 1$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{y se llega a la misma expresión (no es solución)}$$

Otro método

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1})^4} \quad \text{Sea: } x = \tan \theta \quad dx = \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{(\sqrt{\tan^2 \theta + 1})^4} = \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{(\sqrt{\sec^2 \theta})^4} = \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sec^4 \theta} = \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta}$$

$$= \int \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int d\theta + \frac{2}{2} \frac{\sin 2\theta}{2}$$

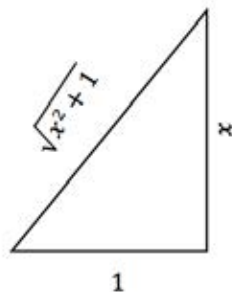
$$= \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Solución total

$$x - 2 \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = x - \frac{3}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$$



Ejercicio 14

$$\int \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 5}{(x-1)^2(x+1)^3} dx$$

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 5}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3}$$

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 5 = A(x-1)(x+1)^3 + B(x+1)^3 + C(x-1)^2(x+1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2$$

Para: $x = 1$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$; $x = 3$

$x = 1$

$$1^3 + 7(1)^2 - 5(1) + 5 = A(0)(2)^3 + B(2)^3 + C(0)^2(2)^2 + D(0)^2(x+1) + E(0)^2$$

$$8 = 8B \rightarrow B = 1$$

$x = -1$

$$(-1)^3 + 7(-1)^2 - 5(-1) + 5 = A(-2)(0)^3 + B(0)^3 + C(-2)^2(0)^2 + D(-2)^2(0) + E(-2)^2$$

$$-1 + 7 + 5 + 5 = 4E \quad 16 = 4E \quad E = 4$$

$x = 0$

$$(0)^3 + 7(0)^2 - 5(0) + 5 = A(-1)(1)^3 + B(1)^3 + C(-1)^2(1)^2 + D(-1)^2(1) + E(-1)^2$$

$$5 = -A + B + C + D + E \quad -A + B + C + D + E = 5$$

$x = 2$

$$(2)^3 + 7(2)^2 - 5(2) + 5 = A(2-1)(2+1)^3 + B(2+1)^3 + C(2-1)^2(2+1)^2 + D(2-1)^2(2+1) + E(2-1)^2$$

$$8 + 28 - 10 + 5 = 27A + 27B + 9C + 3D + E$$

$$= 27A + 27B + 9C + 3D + E = 31$$

$x = 3$

$$(3)^3 + 7(3)^2 - 5(3) + 5 = A(2)(4)^3 + B(4)^3 + C(2)^2(4)^2 + D(2)^2(4) + E(2)^2$$

$$128A + 64B + 32C + 16D + 4E = 80$$

$$\text{Usando Gauss Jordan: } A = 0; B = 1; C = 0; D = 0; E = 4$$

$$\int \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 5}{(x-1)^2(x+1)^3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 4 \int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$u = x-1 \quad du = dx \quad v = x+1 \quad dv = dx$$

$$= \int \frac{du}{u^2} + 4 \int \frac{dv}{v^3} = \frac{u^{-1}}{-1} + 4 \frac{v^{-2}}{-2} = -\frac{1}{u} - 2 \frac{1}{v^2} = -\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} + C$$

Ejercicio 15

$$\int \frac{7x+1}{x^3+6x^2+12x+8} dx$$

$$\frac{7x+1}{x^3+6x^2+12x+8} = \frac{7x+1}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$7x+1 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C$$

$$x = -2$$

$$7(-2)+1 = A(-2+2)^2 + B(-2+2) + C$$

$$-13 = C \quad \rightarrow \quad C = -13$$

$$x = 0$$

$$7(0)+1 = A(0+2)^2 + B(0+2) + C \rightarrow 1 = 4A + 2B + C$$

$$1 = 4A + 2B - 13 \quad \rightarrow \quad 14 = 4A + 2B \rightarrow 2A + B = 7$$

$$x = 1$$

$$7(1)+1 = A(1+2)^2 + B(1+2) + C$$

$$8 = 9A + 3B + C \rightarrow 9A + 3B = 21 \rightarrow -3A - B = -7$$

$$2A + B = 7 \quad A = 0; \quad B = 7; \quad C = -13$$

$$\underline{-3A - B = -7}$$

$$-A = 0$$

$$\int \frac{7x+1}{x^3+6x^2+12x+8} dx = 7 \int \frac{dx}{(x+2)^2} - 13 \int \frac{dx}{(x+2)^3}$$

$$u = x+2 \rightarrow du = dx \qquad dv = x+2 \rightarrow dv = dx$$

$$= 7 \int \frac{du}{u^2} - 13 \int \frac{dv}{v^3} = 7 \frac{u^{-1}}{-1} - 13 \frac{v^{-2}}{-2} = -\frac{7}{x+2} + \frac{13}{2(x+2)^2} + C$$

Comprobación

$$-\left(\frac{(x+2)(0)-7(1)}{(x+2)^2}\right) + \left(\frac{(x+2)^2(0)-\frac{13}{2}(2)(x+2)}{(x+2)^4}\right)$$

$$= \frac{7}{(x+2)^2} - \frac{13(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{7}{(x+2)^2} - \frac{13}{(x+2)^3} = \frac{7(x+2)-13}{(x+2)^3} = \frac{7x+1}{(x+2)^3}$$

Solución ejercicios propuestos de Integración de Expresiones Cuadráticas

Ejercicio 1

$$\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2+4x+1}} dx$$

Tratar de conseguir en el numerador una expresión que tenga $6x+4$

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2+4x+1}} dx &= \int \frac{6x-5+4-4}{\sqrt{3x^2+4x+1}} dx = \int \frac{6x+4-9}{\sqrt{3x^2+4x+1}} dx \\ &= \int \frac{6x+4}{\sqrt{3x^2+4x+1}} dx - 9 \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}} \end{aligned}$$

1era integral

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+4}{\sqrt{3x^2+4x+1}} dx \quad \text{Sea: } u = 3x^2+4x+1 \rightarrow du = 6x+4 \\ = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{3x^2+4x+1} + C \end{aligned}$$

2da integral

$$9 \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$$

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 4x + 1 &= 3 \left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \right) = 3 \left[x^2 + \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \right] \\
 &= 3 \left[\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \right] = 3 \left[\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right] \\
 &= 9 \int \frac{dx}{\sqrt{3 \left[\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right]}} = 9 \int \frac{dx}{\sqrt{3} \sqrt{\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{9}}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{9}}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Sea: } v = x + \frac{2}{3} \rightarrow dv = dx$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2}} \quad \text{Sea: } v = \frac{1}{3} \text{Sect} \rightarrow dv = \frac{1}{3} \text{Sect} \tanh t \, dt$$

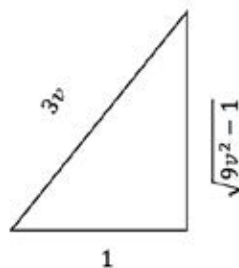
$$= \frac{9}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{3} \text{Sect} \tanh t \, dt}{\sqrt{\frac{1}{9} \text{Sect}^2 t - \frac{1}{9}}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{3} \text{Sect} \tanh t \, dt}{\sqrt{\frac{1}{9} (\text{Sect}^2 t - 1)}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{3} \text{Sect} \tanh t \, dt}{\tanh t}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}} \int \text{Sect} \, dt = \frac{9}{\sqrt{3}} \ln |\text{Sect} - \tanh t| + C$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}} \ln \left| 3v + \frac{\sqrt{9v^2 - 1}}{1} \right| + C$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{3} \ln \left| 3 \left(x + \frac{2}{3} \right) + \sqrt{9 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - 1} \right| + C$$

$$= 3\sqrt{3} \ln \left| 3x + 2 + \sqrt{9 \left(x^2 + 2\frac{2}{3}x - \frac{4}{9} \right) - 1} \right| + C$$



$$= 3\sqrt{3} \ln \left| 3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x + 3} \right| + C$$

$$\text{Respuesta Total: } 2\sqrt{3x^2 + 4x + 1} + 3\sqrt{3} \ln \left| 3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x + 3} \right| + C$$

Ejercicio 2

$$2. - \int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{2}{2}(2x^2 + 3x + 1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3/2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3/2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}} \quad \text{Sea: } u = x + \frac{3}{2} \rightarrow du = dx$$

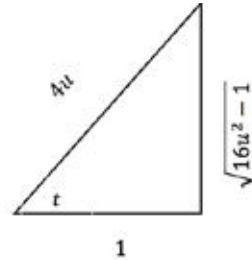
$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \quad \text{Sea: } u = \frac{1}{4} \text{Sect} \rightarrow du = \frac{1}{4} \text{Sect} \text{tgt} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{4} \text{Sect} \text{tgt} dt}{\frac{1}{16} \text{Sec}^2 t - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{4} \text{Sect} \text{tgt} dt}{\frac{1}{16} (\text{Sec}^2 t - 1)} = 2 \int \frac{\text{Sect} \text{tgt} dt}{\text{tg}^2 t}$$

$$= 2 \int \frac{\text{Sect} dt}{\text{tg} t} = 2 \int \frac{1}{\text{Cost}} \cdot \frac{\text{Cost}}{\text{Sent}} dt = 2 \int \frac{dt}{\text{Sent}} = 2 \int \text{Cost} dt$$

$$= 2 \ln |\text{Cost} t - \text{Cotg} t| + C$$

$$= 2 \ln \left| \frac{4u}{\sqrt{16u^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{16u^2 - 1}} \right| + C$$



$$\begin{aligned}
 &= 2\ln \left| \frac{4u-1}{\sqrt{16u^2-1}} \right| + C = 2\ln \left| \frac{4u-1}{\sqrt{(4u+1)(4u-1)}} \right| + C = 2\ln \left| \frac{\sqrt{4u-1}}{\sqrt{4u+1}} \right| + C \\
 &= 2\ln \left| \left(\frac{4u-1}{4u+1} \right)^{1/2} \right| + C = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{4u-1}{4u+1} \right| + C = \ln \left| \frac{4\left(x + \frac{3}{4}\right) - 1}{4\left(x + \frac{3}{4}\right) + 1} \right| + C \\
 &= \ln \left| \frac{4x + 3 - 1}{4x + 3 + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{4x + 2}{4x + 4} \right| + C = \ln \left| \frac{2(2x + 1)}{4(x+1)} \right| + C = \ln \left| \frac{\frac{2x + 1}{x + 1}}{2} \right| + C \\
 &= \ln \left| \frac{2x + 1}{x + 1} \right| - \ln 2 + C = \ln \left| \frac{2x + 1}{x + 1} \right| + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}} \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{15 - (4x^2 + 4x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{15 - (4x^2 + 4x + 1) + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (2x + 1)^2}}
 \end{aligned}$$

Sea: $u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{u}{4}\right) + C = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{2x + 1}{4}\right) + C$$

Ejercicio 4

$$\begin{aligned}
 &\int \sqrt{5-4x-x^2} \, dx \\
 &= \int \sqrt{5(x^2 + 4x)} \, dx = \int \sqrt{5 - (x^2 + 4x + 4) + 4} \, dx = \int \sqrt{9 - (x + 2)^2} \, dx
 \end{aligned}$$

Sea: $u = x + 2 \rightarrow du = dx$

$$= \int \sqrt{9 - u^2} \, du \quad u = 3\text{Sent} \quad du = 3\text{Cost} \, dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{9 - 9\text{Sen}^2 t} (3\text{Cost} dt) = \int \sqrt{9(1 - \text{Sen}^2 t)} (3\text{Cost} dt) \\
&= \int \sqrt{9\text{Cos}^2 t} 3\text{Cost} dt = 9 \int \text{Cos}^2 t dt = 9 \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \\
&= \frac{9}{2} \left[\int dt + \int \text{Cos} 2t dt \right] = \frac{9}{2} \left(t + \frac{\text{Sen} 2t}{2} \right) + C \\
&= \frac{9}{2} \left(t + \frac{2\text{Sent} \text{Cost}}{2} \right) + C \\
&= \frac{9}{2} \left(\text{arcSen} \frac{u}{3} + \frac{u}{3} \frac{\sqrt{9 - u^2}}{3} \right) + C \\
&= \frac{9}{2} \left[\text{arc Sen} \frac{x+2}{3} + \frac{(x+2)\sqrt{9 - (x+2)^2}}{9} \right] + C
\end{aligned}$$



Ejercicio 5

$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$$

Sea: $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \rightarrow dx = x du$

$$= \int \frac{ux dx}{x\sqrt{1-4u-u^2}} = \int \frac{udu}{\sqrt{1-(u^2+4u)}} = \int \frac{udu}{\sqrt{1-(u^2+4u+4)+4}}$$

$$= \int \frac{udu}{\sqrt{5-(u+2)^2}} = \quad \text{Sea: } v = u+2 \rightarrow u = v-2 \rightarrow dv = du$$

$$= \int \frac{(v-2)dv}{\sqrt{5-v^2}} = \int \frac{v dv}{\sqrt{5-v^2}} - 2 \int \frac{dv}{\sqrt{5-v^2}}$$

1era integral

$$\begin{aligned} \int \frac{v dv}{\sqrt{5-v^2}} &= \text{Sea: } w = 5 - v^2 \rightarrow dw = -2v dv \rightarrow v dv = -\frac{dw}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dw}{\sqrt{w}} = -\frac{1}{2} \int w^{-1/2} dw = -\frac{1}{2} \frac{w^{1/2}}{1/2} = -w^{1/2} = -\sqrt{5-v^2} = -\sqrt{5-(u+2)^2} \\ &= -\sqrt{5-(\ln x + 2)^2} + C \end{aligned}$$

2da integral

$$= 2 \int \frac{dv}{\sqrt{5-v^2}} = 2 \operatorname{arc Sen} \left(\frac{v}{\sqrt{5}} \right) = 2 \operatorname{arc Sen} \left(\frac{u+2}{\sqrt{5}} \right) = 2 \operatorname{arc Sen} \left(\frac{\ln x + 2}{\sqrt{5}} \right) + C$$

Respuesta final

$$\int \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} = -\sqrt{5-(\ln x + 2)^2} - 2 \operatorname{arc Sen} \left(\frac{\ln x + 2}{\sqrt{5}} \right) + C$$

Solución a ejercicios propuestos sobre Sustituciones Diversas

Ejercicio 1

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+2x}}$$

Esta es una integral de la forma

$$\sqrt[n]{au+b} \quad a=2; u=x; b=1; n=3$$

$$\text{Sustitución } 1+2x = z^3 \rightarrow x = \frac{z^3-1}{2} \rightarrow dx = \frac{3}{2} z^2 dz$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+2x}} &= \int \left(\frac{z^3-1}{2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt[3]{z^3}} \left(\frac{3}{2} z^2 dz \right) = \frac{3}{8} \int \frac{(z^6-2z^3+1)z^2 dz}{z} \\ &= \frac{3}{8} \int (z^7-2z^4+z) dz = \frac{3}{8} \left[\frac{z^8}{8} - 2 \frac{z^5}{5} + \frac{z^2}{2} \right] + C \end{aligned}$$

Retornando a la variable original x.

$$\frac{3}{8} \left[\frac{1}{8} (1+2x)^{8/3} - \frac{2}{5} (1+2x)^{5/3} + \frac{1}{2} (1+2x)^{2/3} \right] + C$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

La integral tiene dos raíces de la forma $ax+b$. Para el denominador, la sustitución sería $x=z^2$ mientras para el denominador sería $x=z^3$.

Una sustitución válida para los dos casos sería:

$$z = \sqrt[6]{x} = x^{1/6} \rightarrow x = z^6 \quad dx = 6z^5 dz$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1 - z^3}{z^2} 6z^5 dz = \int (z^3 - z^6) dz = 6 \frac{z^4}{4} - 6 \frac{z^7}{7} + C \\ &= \frac{3}{2} (x^{1/6})^2 - \frac{6}{7} (x^{1/6})^7 + C = \frac{3}{2} x^{2/3} - \frac{6}{7} x^{7/6} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 3

$$\int x^2 \sqrt{3x+4} \, dx$$

$$\text{Sea: } 3x+4 = z^2; x = \frac{z^2-4}{3}; dx = \frac{1}{3} 2z \, dz$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{z^2-4}{3} \right)^2 z \frac{1}{3} 2z \, dz = \frac{2}{27} \int z^2 (z^4 - 8z^2 + 16) \, dz \\ &= \frac{2}{27} \int (z^6 - 8z^4 + 16z^2) \, dz = \frac{2}{27} \left(\frac{z^7}{7} - 8 \frac{z^5}{5} + 16 \frac{z^3}{3} \right) + C \\ &= \frac{2}{27} \left[\frac{(\sqrt{3x+4})^7}{7} - \frac{8}{5} (\sqrt{3x+4})^5 + \frac{16}{3} (\sqrt{3x+4})^3 \right] + C \end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$\int \sqrt{1-e^x} \, dx$$

$$\text{Sea: } u = e^x; du = e^x dx$$

$$= \int \sqrt{1-u} \frac{du}{e^x} = \int \sqrt{1-u} \frac{du}{u} = \int \frac{\sqrt{1-u}}{u} du$$

$$\text{Sea: } 1-u = z^2 \rightarrow u = 1-z^2 \rightarrow du = -2z dz$$

$$= \int \frac{z}{1-z^2} (-2z) dz = -2 \int \frac{z^2}{1-z^2} dz$$

Dividiendo para convertir en fracción propia

$$= -2 \int \left[-1 - \frac{1}{z^2-1} \right] dz = -2 \left[- \int dz - \int \frac{dz}{z^2-1} \right] = -2 \left[-z - \int \frac{dz}{(z-1)(z+1)} \right]$$

$$\int \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} = \frac{Az + A + Bz - B}{(z-1)(z+1)} = \frac{(A+B)z + A-B}{(z-1)(z+1)}$$

$$A + B = 0$$

$$\underline{A-B = 1}$$

$$2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}$$

$$= 2z + 2 \int \frac{\frac{1}{2} dz}{z-1} + 2 \int \frac{-\frac{1}{2} dz}{z+1} = 2z + \ln|z-1| - \ln|z+1| + C$$

$$= 2z + \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \text{ pero } z = \sqrt{1-u}$$

$$= 2\sqrt{1-u} + \ln \left| \frac{\sqrt{1-u}-1}{\sqrt{1-u}+1} \right| + C \text{ pero } u = e^x$$

$$= 2\sqrt{1-e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} \right| + C$$

Ejercicio 5

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$$

Sustitución recomendada $1+x+x^2 = (z-x)^2$

$$1+x+x^2 = z^2-2zx+x^2 \rightarrow 2zx+x = z^2-1$$

$$x(2z+1) = z^2-1 \quad x = \frac{z^2-1}{2z+1}$$

$$dx = \frac{(2z+1)(2z)-(z^2-1)(2)}{(2z+1)^2} dz \quad dx = \frac{4z^2+2z-2z^2+2}{(2z+1)^2} dz$$

$$= \frac{2z^2+2z+2}{(2z+1)^2} dz$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{2 \frac{z^2+z+1}{(2z+1)^2} dz}{\frac{z^2-1}{2z+1} (z-x)} = 2 \int \frac{(z^2+z+1)dz}{(z^2-1)(2z+1) \left(z - \frac{z^2-1}{2z+1} \right)}$$

$$2 \int \frac{(z^2+z+1)dz}{(z^2-1)(2z+1) \left(\frac{2z^2+z-z^2+1}{2z+1} \right)} = 2 \int \frac{z^2+z+1}{(z^2-1)(z^2+z+1)} dz$$

$$2 \int \frac{dz}{z^2-1} = 2 \int \frac{dz}{(z+1)(z-1)}$$

$$\int \frac{dz}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} = \frac{Az-A+Bz+B}{(z+1)(z-1)} = \frac{(A+B)z+B-A}{(z+1)(z-1)}$$

$$A+B=0$$

$$\underline{B-A=1}$$

$$2B=1 \rightarrow B=\frac{1}{2}; A=-\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dz}{(z+1)(z-1)} = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z+1} + \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z-1}$$

$$\text{Sea: } u = z+1 \rightarrow du = dz \quad v = z-1 \rightarrow du = dz$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \ln|u| + \frac{1}{2} \ln|v| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right|$$

$$2 \int \frac{dz}{z^2-1} = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| =$$

De la sustitución recomendada al inicio $1 + x + x^2 = (z-x)^2$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = z-x \rightarrow z = x + \sqrt{1 + x + x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \ln \left| \frac{x\sqrt{1+x+x^2}-1}{x\sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C = \ln \left| \frac{x-1\sqrt{1+x+x^2}}{x+1\sqrt{1+x+x^2}} \right| + C$$

Ejercicio 6

$$\int \frac{x dx}{(\sqrt{5-4x-x^2})^3}$$

$$5 - 4x - x^2 = -(x^2 + 4x - 5) = -(x+5)(x-1) = (x+5)(-x+1) = (5+x)(1-x)$$

$$\text{Sustitución: } (1-x)^2 z^2 = 5 - 4x - x^2 = (5+x)(1-x)$$

$$(1-x)^2 z^2 = (5+x)(1-x)$$

$$\textcircled{1} (1-x)z^2 = 5+x$$

$$z^2 - z^2 x = 5+x$$

$$z^2 - 5 = z^2 x + x = x(z^2 + 1) \rightarrow x = \frac{z^2 - 5}{(z^2 + 1)}$$

$$dx = \frac{(z^2 + 1)(2z) - (z^2 - 5)(2z)}{(z^2 + 1)^2} = \frac{12z}{(z^2 + 1)^2} dz$$

$$\int \frac{x dx}{[(1-x)z]^3} = \int \frac{\left(\frac{z^2-5}{z^2+1}\right) \left(\frac{12z}{(z^2+1)^2}\right) dz}{\left[\left(1 - \frac{z^2-5}{z^2+1}\right) z\right]^3}$$

$$\int \frac{\frac{12z(z^2-5)}{(z^2+1)^3} dz}{\frac{(z^2+1- z^2+5)^3}{(z^2+1)^3} z^3} = \int \frac{12z(z^2-5)}{6^3 z^3} dz = 2 \int \frac{z^2-5}{36z^2} dz$$

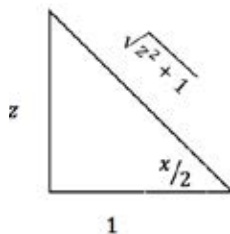
$$= \frac{1}{18} \int \left(1 - \frac{5}{z^2}\right) dz = \frac{1}{18} z + \frac{5}{z} + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{de } \textcircled{1} \quad (1-x)z^2 &= 5+x \quad z^2 = \frac{5+x}{1-x} \quad z = \sqrt{\frac{5+x}{1-x}} \\
 &= \frac{1}{18} \sqrt{\frac{5+x}{1-x}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{5+x}{1-x}}} + C = \frac{1}{18} \frac{\sqrt{5+x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{5\sqrt{1-x}}{\sqrt{5+x}} + C \\
 &= \frac{5+x+5(1-x)18}{18\sqrt{1-x}\sqrt{5+x}} + C = \frac{5+x+5-5x}{18\sqrt{1-x}\sqrt{5+x}} = \frac{10-4x}{18\sqrt{1-x}\sqrt{5+x}} \\
 &= \frac{5-2x}{9\sqrt{1-x}\sqrt{5+x}} = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 7

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x}$$

Sea: $\operatorname{sea} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = z$; $\cos x = \frac{1-z^2}{z^2+1}$; $dx = \frac{2dz}{z^2+1}$



$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{2 \frac{dz}{z^2+1}}{2 + \frac{1-z^2}{z^2+1}} = 2 \int \frac{dz}{2z^2 + 2 + 1 - z^2} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 3}$$

$$= 2 \int \frac{dz}{z^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$$

Ejercicio 8

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sen} x + \operatorname{tg} x}$$

$$\text{Sea: } z = tg \frac{x}{2}; \text{ Sen } x = \frac{2z}{z^2 + 1}; dx = \frac{2dz}{z^2 + 1}$$

Usando las funciones trigonométricas de ángulo doble

$$\begin{aligned} tg x &= \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2z}{1 - z^2} = \int \frac{2 \frac{dz}{z^2 + 1}}{2z \left(\frac{1}{z^2 + 1} - \frac{1}{z^2 - 1} \right)} \\ \int \frac{\frac{dz}{z^2 + 1}}{z \left(\frac{1}{z^2 + 1} - \frac{1}{z^2 - 1} \right)} &= \int \frac{\frac{dz}{z^2 + 1}}{z \left[\frac{z^2 - 1 - z^2 - 1}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)} \right]} = \int \frac{dz}{\frac{(-2z)}{z^2 - 1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(z^2 - 1)dz}{z} \\ &= -\frac{1}{2} \int z dz + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln z + C \\ &= -\frac{1}{4} tg^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

Ejercicio 9

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}}$$

$$\text{Sea: } \text{sea } tg \left(\frac{x}{2} \right) = z; \cos x = \frac{1 - z^2}{z^2 + 1}; dx = \frac{2dz}{z^2 + 1}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{z^2 + 1}}{\sqrt{\frac{1 - z^2}{z^2 + 1} + \left(\frac{1 - z^2}{z^2 + 1} \right)^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{z^2 + 1}}{\sqrt{\frac{(z^2 + 1)(1 - z^2) + (1 - z^2)^2}{(z^2 + 1)^2}}}$$

$$\int \frac{\frac{2dz}{z^2 + 1}}{\frac{\sqrt{(z^2 + 1)(1 - z^2) + (1 - z^2)^2}}{z^2 + 1}} = 2 \int \frac{dz}{\sqrt{2(1 - z^2)}} = \sqrt{2} \int \frac{dz}{1 - z^2}$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{arc Sen}(z) + C$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{arc Sen} \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] + C$$

Ejercicio 10

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sen} x}$$

$$\text{Sea: } \operatorname{Sen} x = \frac{2z}{z^2 + 1}; \operatorname{Cos} x = \frac{1 - z^2}{z^2 + 1}; dx = \frac{2dz}{z^2 + 1}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{z^2 + 1}}{1 + \frac{1 - z^2}{z^2 + 1} + \frac{2z}{z^2 + 1}} = \int \frac{\frac{2dz}{z^2 + 1}}{\frac{z^2 + 1 + 1 - z^2 + 2z}{z^2 + 1}} = \int \frac{2dz}{2 + 2z} = \int \frac{dz}{1 + z}$$

$$\text{Sea: } u = 1 + z; du = dz$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|1 + z| = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

Solución de ejercicios propuestos sobre Cambio de Límites correspondiente a un cambio de variables

Ejercicio 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x \operatorname{Sen} x \, dx$$

$$\text{Sea: } u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{Sen} x \, dx$$

$$\text{Para: } x = 0 \quad u = \cos(0) = 1 \quad x = \frac{\pi}{3} \quad u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{\frac{1}{2}} u^4 \, du = - \frac{u^5}{5} \Big|_1^{\frac{1}{2}} = - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - (1)^5 \right] = - \frac{1}{5} \left[\frac{1}{32} - 1 \right] = \\ &= - \frac{1}{5} \left(- \frac{31}{32} \right) = \frac{31}{160} = 0.19375 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x-1} - \int_1^3 \frac{dx}{2x+1}$$

Primera integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x-1} \quad u = 2x-1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\text{Para: } x = 1 \quad u = 1$$

$$x = 3 \quad u = 5$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} |\ln u|_1^5 = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{1} \right) = \frac{1}{2} \ln 5 = 0.8047$$

Segunda integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x+1} \quad u = 2x+1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\text{Para: } x = 1 \quad u = 3$$

$$x = 3 \quad u = 7$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} |\ln u|_3^7 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{7}{3} \right) = 0.4236$$

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln 5 - \ln \left(\frac{7}{3} \right) \right] \frac{1}{2} \ln \left(\frac{15}{7} \right) = 0.3811$$

Ejercicio 3

$$\int_2^4 \frac{e^{\ln x}}{x^2 + 7} dx$$

$$\text{ya que } e^{\ln x} = x$$

$$= \int_2^4 \frac{x}{x^2 + 7} dx \quad \text{Sea: } u = x^2 + 7 \rightarrow du = 2x dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\text{Para: } x = 2 \quad u = 11$$

$$x = 4 \quad u = 23$$

$$= \frac{1}{2} \int_{11}^{23} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} |\ln u|_{11}^{23} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{23}{11} \right) = 0.3688$$

Ejercicio 4

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Sea: } u = \arctan x \rightarrow du = \frac{1}{x^2 + 1} dx \rightarrow dx = du(x^2 + 1)$$

$$\text{Para: } x = 0 \quad u = 0$$

$$x = 1 \quad u = \frac{\pi}{4}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u \, du(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u \, du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32} = 0.3084$$

Ejercicio 5

$$\int_6^9 \frac{3 \ln x - 5}{x} dx$$

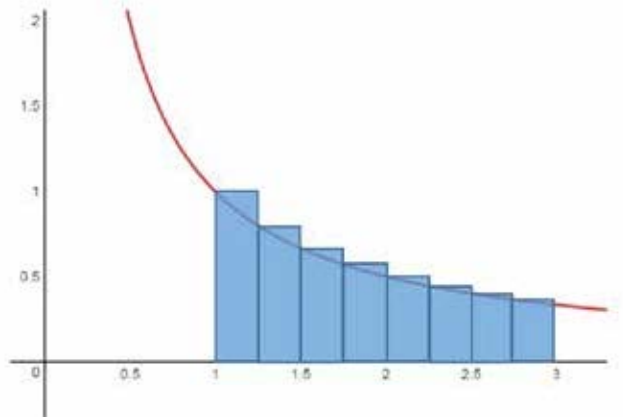
$$\text{Sea: } u = 3 \ln x - 5 \rightarrow du = \frac{3}{x} dx$$

$$\frac{1}{3} \int_{0.3752}^{1.5917} u \, du = \frac{1}{3} \left| \frac{u^2}{2} \right|_{0.3752}^{1.5917} = \frac{1}{6} [1.5917^2 - 0.3752^2] = 0.3988$$

Solución ejercicios propuestos sobre Área Bajo la Curva

1. Encontrar el área bajo la curva de la función $f(x)=1/x$ en forma aproximada (por exceso) entre 1 y 3 usando rectángulos diferenciales con incrementos de 0.25

Figura 1
Ejercicio propuesto 1 sobre Área bajo la curva



$$A_1 = (0.25)f(1) = (0.25)(1) = 0.25$$

$$A_2 = (0.25)f(1.25) = (0.25)\frac{1}{1.25} = 0.2$$

$$A_3 = (0.25)f(1.50) = (0.25)\frac{1}{1.50} = 0.1667$$

$$A4 = (0.25)f(1.75) = (0.25)\frac{1}{1.75} = 0.1428$$

$$A5 = (0.25)f(2.00) = (0.25)\frac{1}{2.00} = 0.125$$

$$A6 = (0.25)f(2.25) = (0.25)\frac{1}{2.25} = 0.1111$$

$$A7 = (0.25)f(2.50) = (0.25)\frac{1}{2.50} = 0.1000$$

$$A8 = (0.25)f(2.75) = (0.25)\frac{1}{2.75} = 0.0909$$

$$AT = 1.2865$$

El área exacta calculada por integración es:

$$A = \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3 = \ln \left| \frac{3}{1} \right| = 1.0986$$

El área aproximada es mayor que el área exacta, como se esperaba.

2. Encontrar el área bajo la curva de la función $f(x) = e^{-x^2}$ en forma aproximada (por defecto) entre 0 y 1 usando rectángulos diferenciales con incrementos de 0.25

$$A1 = f(0.25)(0.25) = (0.9394)(0.25) = 0.2348$$

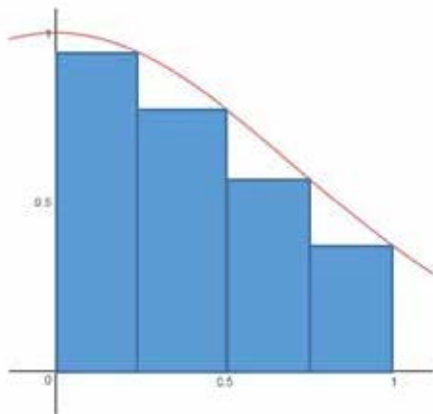
$$A2 = f(0.5)(0.25) = (0.7788)(0.25) = 0.1947$$

$$A3 = f(0.75)(0.25) = (0.5697)(0.25) = 0.1424$$

$$A4 = f(1)(0.25) = (0.3678)(0.25) = 0.092$$

$$AT = 0.6639$$

Figura 2
Ejercicio Propuesto 2 sobre Área Bajo la Curva



El área exacta calculada por integración es:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.74682 u^2$$

El área aproximada es menor que el área exacta, como se esperaba

3. Encontrar el área bajo la curva de la función $y=x^3-x^2-6x$ en forma aproximada por el método de los trapecios, entre -2 y 0 con incrementos de 0.25

$$A1 = \left(\frac{f(-1.75) + f(-2)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{2.078 + 0}{2} \right) (0.25) = 0.25975$$

$$A2 = \left(\frac{f(-1.5) + f(-1.75)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{3.375 + 2.0781}{2} \right) (0.25) = 0.6816$$

$$A3 = \left(\frac{f(-1.25) + f(-1.5)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{3.9843 + 3.375}{2} \right) (0.25) = 0.9199$$

$$A4 = \left(\frac{f(-1) + f(-1.25)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{4 + 3.9843}{2} \right) (0.25) = 0.9980$$

$$A5 = \left(\frac{f(-0.75) + f(-1)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{3.5156 + 4}{2} \right) (0.25) = 0.9394$$

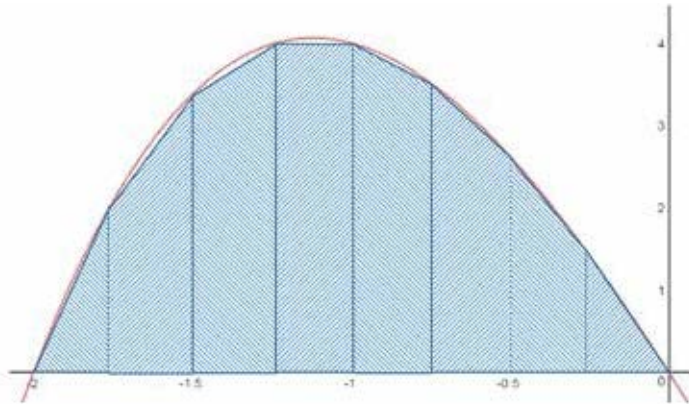
$$A6 = \left(\frac{f(-0.5) + f(-0.75)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{2.625 + 3.5156}{2} \right) (0.25) = 0.7675$$

$$A7 = \left(\frac{f(-0.5) + f(-0.25)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{2.625 + 1.4218}{2} \right) (0.25) = 0.50586$$

$$A8 = \left(\frac{f(-0.25) + f(0)}{2} \right) (0.25) = \left(\frac{1.4218 + 0}{2} \right) (0.25) = 0.1777$$

$$AT = 5.2497 \text{ } u^2$$

Figura 3
Ejercicio propuesto 3 sobre Área Bajo la Curva



El área exacta calculada por integración es:

$$\int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx = 5.3333 \text{ } u^2$$

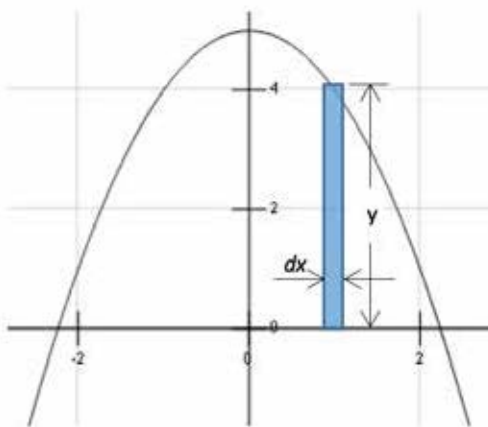
El área aproximada es ligeramente menor que el área exacta, como se esperaba

4. Hallar el área comprendida entre la función $y = -x^2 + 5$ y el eje x , usando:

- Rectángulos diferenciales verticales
- Rectángulos diferenciales horizontales

Figura 4

Ejercicio propuesto 4 sobre Área Bajo la Curva



a. Rectángulos diferenciales verticales

$$f(x) = -x^2 + 5$$

Reemplazando x por x

$$f(-x) = -(-x^2) + 5 = -x^2 + 5$$

Luego la función es simétrica con respecto al eje y . Se procede a calcular entre 0 y $\sqrt{5}$

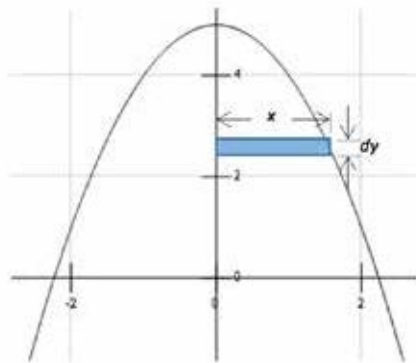
$$A = 2 \int_0^{\sqrt{5}} (-x^2 + 5) dx = 2 \left[-\int_0^{\sqrt{5}} x^2 dx + 5 \int_0^{\sqrt{5}} dx \right]$$

$$A = 2 \left[-\left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{\sqrt{5}} + 5|x| \right]_0^{\sqrt{5}} = 2 \left[-\frac{1}{3} ((\sqrt{5})^3 + 5(\sqrt{5})) \right] = 2 \left[-\frac{5\sqrt{5}}{3} + 5\sqrt{5} \right]$$

$$= 2 \left[5\sqrt{5} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] = 2 \left(\frac{2.5}{3} \sqrt{5} \right) = \frac{20}{3} \sqrt{5} = 14.907 u^2$$

Figura 5

Ejercicio propuesto 4 sobre Área Bajo la Curva



b. Rectángulos diferenciales horizontales

$$A = 2 \int_0^5 x dy = 2 \int_0^5 \sqrt{5-y} dy$$

Sea $u=5-y$ $du=-dy$

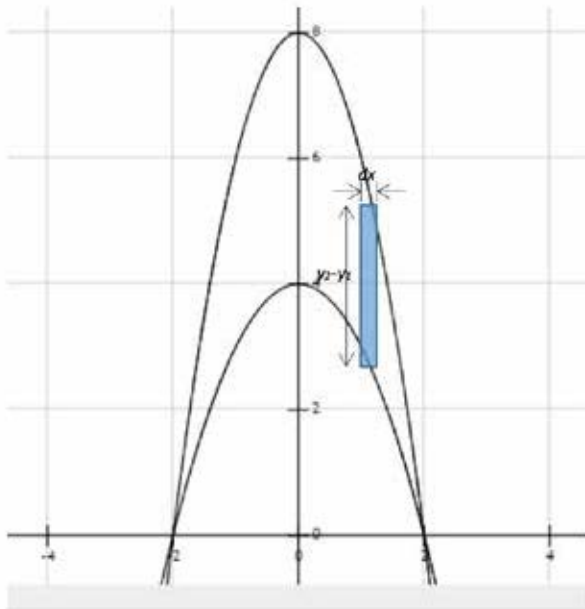
Para $y=0$ $u=5$ para $y=5$ $u=0$

$$-2 \int_5^0 u^{1/2} du = -2 \cdot \frac{2}{3} \left| u^{3/2} \right|_5^0 = -\frac{4}{3} (0^{3/2} - 5^{3/2}) = \frac{20}{3} \sqrt{5} = 14.907 u^2$$

5. Hallar el área comprendida entre las curvas $y=8-2x^2$; $y=4-x^2$

Figura 6

Ejercicio propuesto 5 sobre Área Bajo la Curva



Haciendo la prueba de simetría a ambas funciones:

$$f(-x) = 8 - 2(-x)^2 = 8 - 2x^2 \text{ (Simétrica)}$$

$$g(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 \text{ (Simétrica)}$$

Límites de integración:

$$8 - 2x^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{para: } x = 2 \quad f(x) = 8 - 2(2)^2 = 0 \quad (2, 0)$$

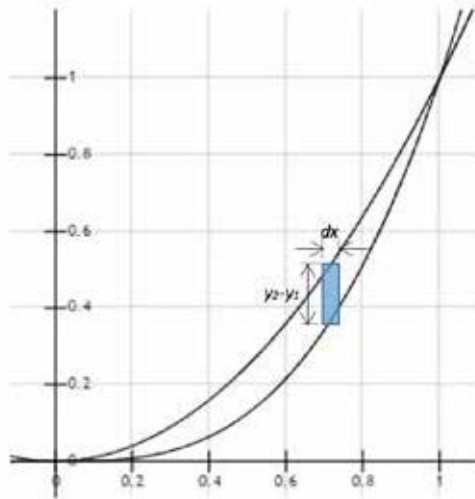
$$x = -2 \quad f(x) = 8 - 2(-2)^2 = 0 \quad (-2, 0)$$

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^2 [8 - 2x^2 - (4 - x^2)] dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left[4|x| \Big|_0^2 - \frac{1}{3}|x^3| \Big|_0^2 \right] \\
 &= 2 \left[8 - \frac{1}{3}(8) \right] = 2 \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3} u^2
 \end{aligned}$$

6. Hallar el área comprendida entre las curvas $y=x^2$; $y=x^3$

Figura 7

Ejercicio propuesto 6 sobre Área Bajo la Curva



Puntos de intersección

$$x^2 = x^3 \rightarrow x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x-1) = 0$$

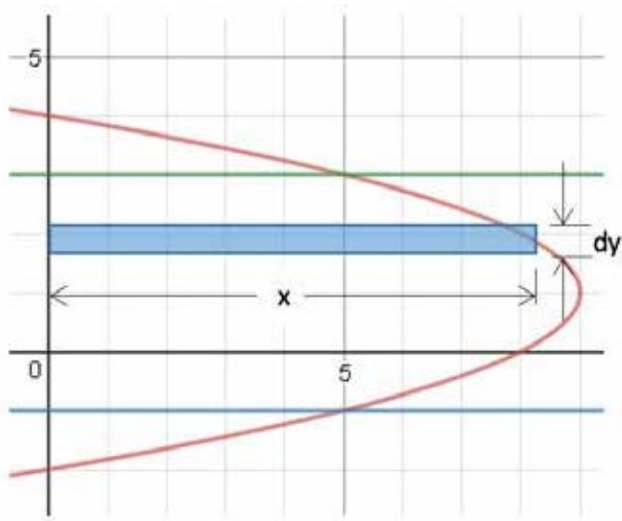
$$x_1 = 0; x_2 = 1$$

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{1}{3} |x^3|_0^1 - \frac{1}{4} |x^4|_0^1 \right]$$

$$= \frac{1}{3} (1)^3 - \frac{1}{4} (1)^4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} u^2$$

7. Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2 - 2y + x - 8 = 0$, las rectas $x=0$, $y=-1$, $y=3$

Figura 8
Ejercicio propuesto 7 sobre Área Bajo la Curva



$$= \int_{-1}^3 x dy = \int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2) dy$$

$$A = 8|y| \Big|_{-1}^3 + 2 \left| \frac{y^2}{2} \right|_{-1}^3 - \frac{1}{3} |y^3| \Big|_{-1}^3$$

$$A = 8[3 - (-1)] + [3^2 - (-1)^2] - \frac{1}{3} [3^3 - (-1)^3]$$

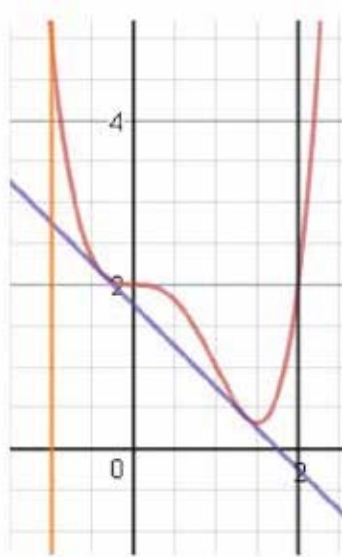
$$A = 8(4) + (8) - \frac{1}{3}(28)$$

$$A = 32 + 8 - \frac{28}{3} = 40 - \frac{28}{3} = \frac{92}{3} u^2$$

8. Encontrar el área de la región comprendida entre las curvas: $y = x^4 - 2x^3 + 2$; $x = -1$; $x = 2$; $y = -x + 7/4$

Figura 9

Ejercicio propuesto 8 sobre Área Bajo la Curva



Dada la complejidad de la figura, es mejor calcular por separado las áreas bajo las curvas $y = x^4 - 2x^3 + 2$ y $y = -x + \frac{7}{4}$ y luego restarlas

$$A1 = \int_{-1}^2 (x^4 - 2x^3 + 2) dx = \frac{1}{5} |x^5|_{-1}^2 - \frac{2}{4} |x^4|_{-1}^2 + 2|x|_{-1}^2$$

$$A1 = \frac{1}{5} [2^5 - (-1)^5] - \frac{1}{2} [2^4 - (-1)^4] + 2[2 - (-1)]$$

$$= \frac{1}{5} (32 + 1) - \frac{1}{2} (16 - 1) + 2(3) = \frac{33}{5} - \frac{15}{2} + 6 = \frac{51}{10}$$

$$A2 = \int_{-1}^2 \left(-x + \frac{7}{4} \right) dx = -\frac{1}{2} |x^2|_{-1}^2 + \frac{7}{4} |x|_{-1}^2 = -\frac{1}{2} [2^2 - (-1)^2] + \frac{7}{4} [2 - (-1)]$$

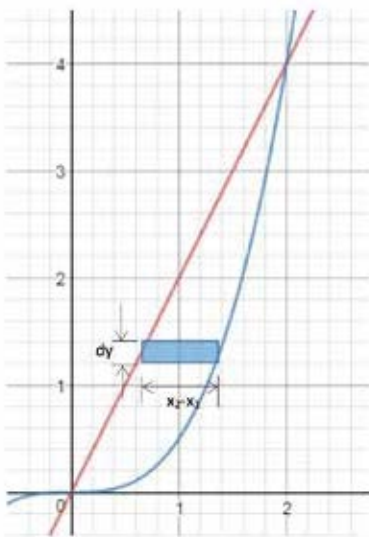
$$A2 = -\frac{1}{2} (4 - 1) + \frac{7}{4} (3) = -\frac{3}{2} + \frac{21}{4} = \frac{15}{4}$$

$$AT = A1 - A2 = \frac{51}{10} - \frac{15}{4} = \frac{27}{20} u^2$$

9. Hallar el área comprendida entre las curvas: $y=2x$; $y=(1/2)x^3$ usando rectángulos diferenciales horizontales

Figura 10

Ejercicio propuesto 9 sobre Área Bajo la Curva



$$x_2 = \sqrt[3]{2y_2}; x_1 = \frac{y_1}{2}$$

$$\text{Punto de Intersección } 2x = \frac{1}{2}x^3 \rightarrow x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \pm 2 \rightarrow y = 4x(x^2 - 4) = 0 \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \pm 2 \rightarrow y = 4$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \left(\sqrt[3]{2y} - \frac{y}{2} \right) dy \\ &= \sqrt[3]{2} \int_0^4 y^{1/3} dy - \frac{1}{2} \int_0^4 y dy \\ &= \sqrt[3]{2} \left[\frac{y^{4/3}}{4/3} \right]_0^4 - \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} (4^{4/3}) - \frac{1}{4} (4^2) \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{4^4} - 4 = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{4^3 4} - 4 \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{2} 4 \sqrt[3]{4} - 4 = 3 \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} - 4 = 2 u^2 \end{aligned}$$

10. Usando integrales, calcular el área de la elipse con centro en el origen, semieje mayor "a" y semieje menor "b"

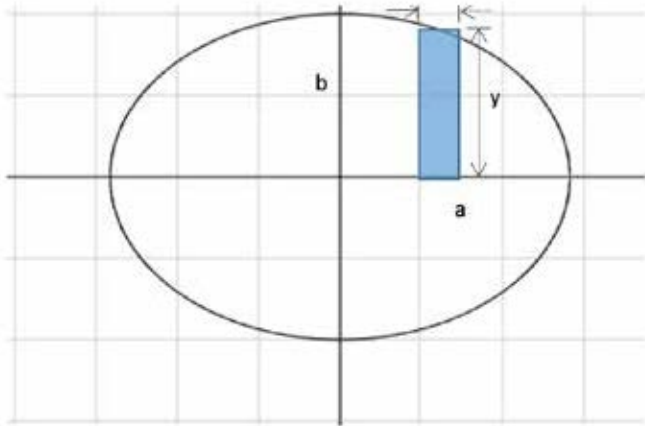
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \rightarrow y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ A &= \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{Sea: } x = a \text{ Sen } t \quad dx = a \text{ Cost } dt$$

Cambio de Limites: (cuarta parte del área)

$$\text{para } x = 0 \quad t = \text{arc Sen } \frac{x}{a} = \text{arc Sen } \frac{0}{a} = 0$$

Figura 11
Ejercicio propuesto 10 sobre Área Bajo la Curva



$$\text{para } x = a \quad t = \arcsen \frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \text{Sen}^2 t} \, a \text{Cost} dt = \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} a \sqrt{1 - \text{Sen}^2 t} \, a \text{Cost} dt \\ &= ab \int_0^{\pi/2} \text{Cos}^2 t dt = ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \text{Cos } 2t) dt = \frac{ab}{2} \left[\int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} \text{Cos } 2t dt \right] \\ &= \frac{ab}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \left| \frac{\text{Sen } 2t}{2} \right|_0^{\pi/2} \right] = \frac{ab}{2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{2} (0 - 0) \right] = \frac{\pi ab}{4} \end{aligned}$$

Multiplicando por 4 el área total: $A = \pi ab$

Solución de ejercicios propuestos de Integrales Impropias

Ejercicio 1

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg x]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg b - \arctg 0] = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 2

$$\int_{100}^{\infty} e^x dx$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{100}^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^x]_{100}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^b - e^{100}]$$

La integral diverge

Ejercicio 3

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1,00001}}$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1,00001} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-0,00001}}{-0,00001} \right]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(0,00001)x^{0,00001}} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{0,00001b^{0,00001}} - \frac{1}{0,00001 \cdot 1^{0,00001}} \right]$$

$$= 100.000$$

Ejercicio 4

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \epsilon} \int_{a \rightarrow \epsilon}^2 (x-1)^{-1/3} dx \quad \text{Sea: } u = x-1 \quad du = dx$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^2 u^{-1/3} du = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{u^{2/3}}{2/3} \right|_{1+\epsilon}^2 = \frac{3}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| (x-1)^{2/3} \right|_{1+\epsilon}^2$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[(2-1)^{2/3} - (1+\epsilon-1)^{2/3} \right] = \frac{3}{2} (1-0) = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 5

$$\int_3^{\infty} x \ln x dx$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \quad dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \right|_3^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \right|_3^b$$

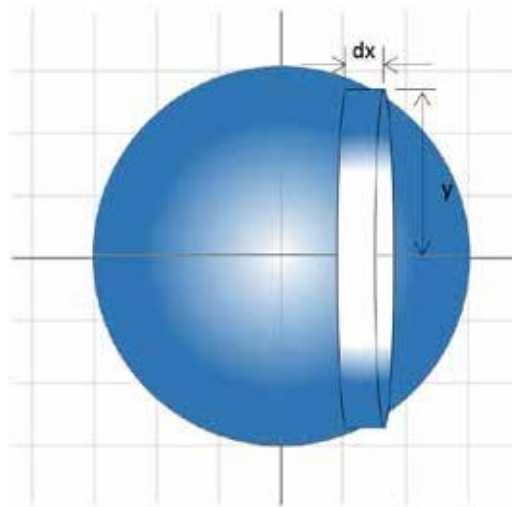
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right|_3^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} b^2 \ln b - \frac{1}{4} b^2 - \left(\frac{1}{2} 3^2 \ln 3 - \frac{1}{4} 3^2 \right) \right]$$

La integral diverge

Solución de ejercicios propuestos sobre Volúmenes

1. Calcule el volumen de una esfera de radio r usando el método de discos

Figura 12
Ejercicio propuesto 1 sobre ejercicios Volúmenes



Ecuación del círculo generador de la esfera:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(r^2 - x^2)dx$$

$$V = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$

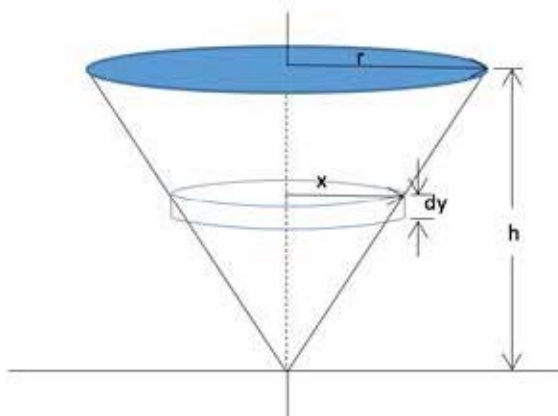
$$= \pi \left[r^2 x \Big|_0^r - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r \right]$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{2}{3} \pi r^3$$

La esfera total es $\frac{4}{3} \pi r^3$

2. Calcule el volumen de un cono de radio r y altura h

Figura 13
Ejercicio propuesto 2 sobre Volúmenes



Ecuación de la recta que genera el cono:

$$y = \frac{h}{r} x \rightarrow x = \frac{r}{h} y$$

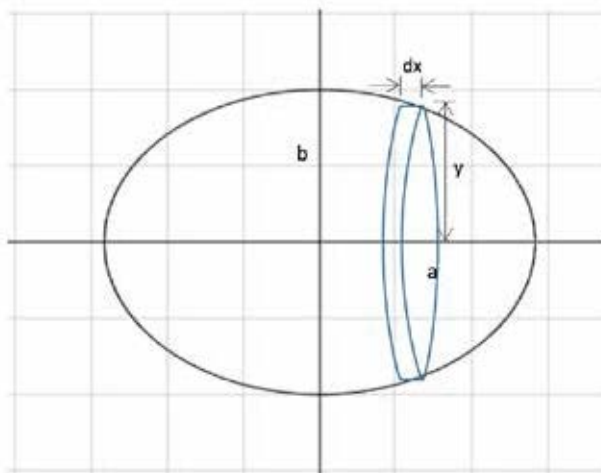
$$dV = \pi x^2 dy = \pi \left(\frac{r}{h} y \right)^2 dy$$

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h y^2 dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

3. Calcule el volumen generado por una elipse horizontal con semieje mayor a y semieje menor b , rotando sobre el eje x :

Figura 14
Ejercicio propuesto 3 sobre Volúmenes



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$$

$$dV = \pi y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2 dx = \pi \left[b^2 |x| \Big|_0^a - \frac{b^2}{a^2} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^a \right] = \pi \left[ab^2 - \frac{b^2}{a^2} \frac{a^3}{3} \right]$$

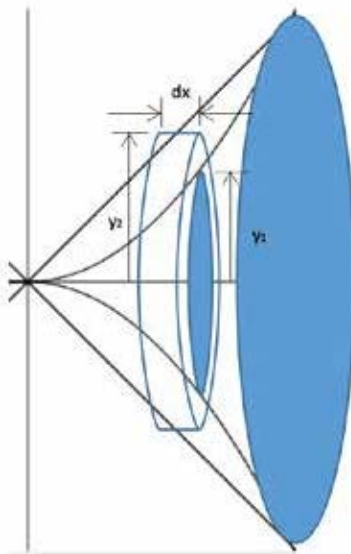
$$V = \pi \left(ab^2 - \frac{1}{3} b^2 a \right) = \frac{2}{3} \pi ab^2$$

El volumen total es el doble: $V = \frac{4}{3} \pi ab^2$

4. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar el área comprendida entre las curvas $y=x$; $y=x^2$.

Figura 15

Ejercicio propuesto 4 sobre Volúmenes



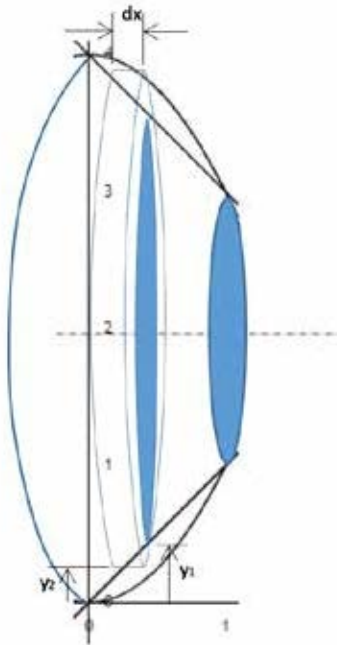
$$dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)dx = \pi(x^2 - x^4)dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \right]$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \left(\frac{5-3}{15} \right) = \frac{2}{15} \pi u^2$$

5. Encontrar el volumen del sólido generado en el ejercicio 4 al girar alrededor del eje $y=2$

Figura 16
Ejercicio propuesto 5 sobre Volúmenes



$$dV = \pi[(2 - y_1)^2 - (2 - y_2)^2]dx$$

$$dV = \pi[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]dx$$

$$dV = \pi[(4 - 4x^2 + x^4) - (4 - 4x + x^2)]dx$$

$$dV = \pi[4 - 4x^2 + x^4 - 4 + 4x - x^2]dx$$

$$dV = \pi[x^4 - 5x^2 + 4x]dx$$

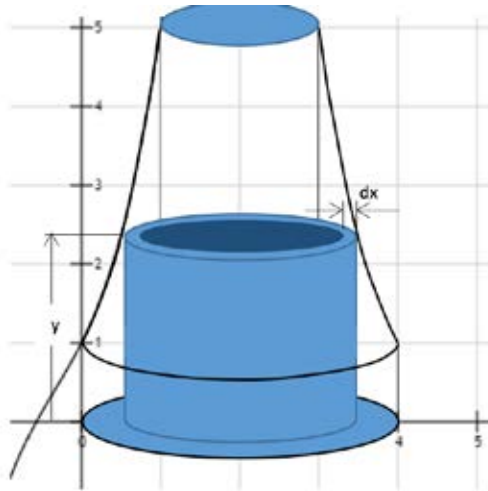
$$V = \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-5}^1 - 5 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2 \right) = \pi \left(\frac{3 - 25 + 30}{15} \right) = \frac{8}{15} \pi$$

6. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región entre las curvas $y=x^3+x^2+2x+1$, $x=1$, el eje x , el eje y , alrededor del eje $x=2$

Figura 17

Ejercicio propuesto 6 sobre Volúmenes



$$y_1 = x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad y_2 \quad x = 1$$

$$dV = \pi(x_2^2 - x_1^2)dy$$

Ya que es difícil despejar x , se intentará resolver el problema por medio de cilindros diferenciales o casquetes

$$dV = 2\pi(2 - x)(x^3 + x^2 + 2x + 1)dx$$

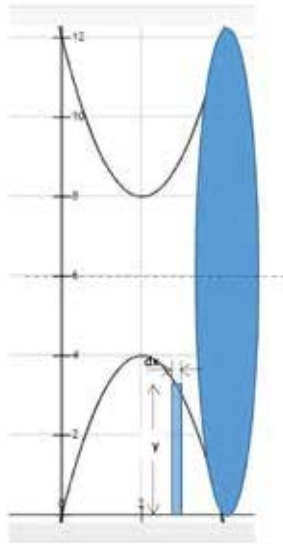
$$dV = 2\pi(2x^3 + 2x^2 + 4x + 2 - x^4 - x^3 - 2x^2 - x)dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^3 + 3x + 2)dx$$

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} \Big|_0^1 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + 3 \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 2|x| \Big|_0^1 \right] \right] \\
 &= 2\pi \left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 \right] = 2\pi \frac{-4 + 5 + 30 + 40}{20} = \frac{71}{20} \cdot 2\pi = \frac{71}{10} \pi
 \end{aligned}$$

7. Hallar el volumen que se genera al rotar el área comprendida entre la parábola $y=4x-x^2$ y el eje x con respecto a la recta $y=6$

Figura 18
Ejercicio propuesto 7 sobre Volúmenes



$$dV = \pi[6^2 - (6 - y)^2]dx$$

$$dV = \pi[6^2 - 6^2 + 12y + y^2]dx = \pi[(12y - y^2)]dx$$

$$dV = \pi[12(4x - x^2) - (4x - x^2)^2]dx$$

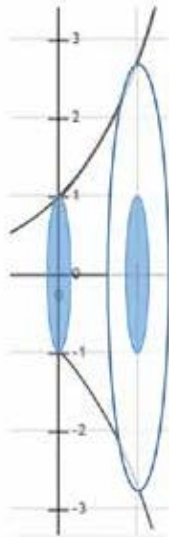
$$V = \pi \int_0^4 (48x - 12x^2 - 16x^2 + 8x^3 - x^4)dx$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4) dx \\
 &= \pi \left[48 \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^4 - 28 \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^4 + 8 \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^4 - \left| \frac{x^5}{5} \right|_0^4 \right] \\
 V &= \pi (24(4^2)) - \frac{28}{3} (4^3) + 2(4^4) - \frac{4^5}{5} \\
 V &= \pi \left(384 - \frac{1792}{3} + 512 - \frac{1024}{5} \right) \\
 V &= \pi \left(\frac{5760 - 8960 + 7680 - 3072}{15} \right) = \frac{1408}{15} \pi
 \end{aligned}$$

8. Encontrar el volumen del sólido que se genera al girar la región comprendida entre $y=e^x$, $y=1$, $x=1$, alrededor del eje x

Figura 19

Ejercicio propuesto 8 sobre Volúmenes



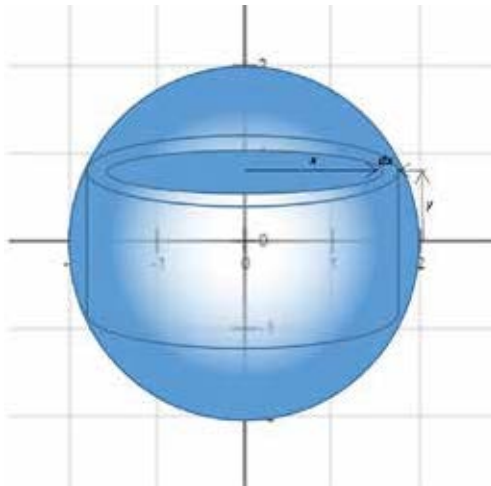
$$dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)dx = \pi(e^{2x} - 1^2)dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 1)dx = \pi \left[\left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - [x]_0^1 \right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} - 1 \right) \right] = \pi \left[\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \frac{e^2 - 3}{2} \pi = 6,8943 \text{ u}^3$$

9. Resolver el problema 1 de esta sección usando el método de cilindros diferenciales huecos o casquetes.

Figura 20
Ejercicio propuesto 9 sobre Volúmenes



Ec. Círculo $x^2 + y^2 = r^2$

$$dv = 2\pi r h dr = 2\pi x(2y)dx$$

$$dV = 4\pi x \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right) dx$$

$$V = 4\pi \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\text{Sea: } u = r^2 - x^2$$

$$du = -2x dx$$

$$V = 4\pi \int_0^r x \sqrt{u} \left(-\frac{du}{2x} \right)$$

$$= -\frac{4\pi}{2} \int_0^r u^{1/2} du$$

$$= -2\pi \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^r$$

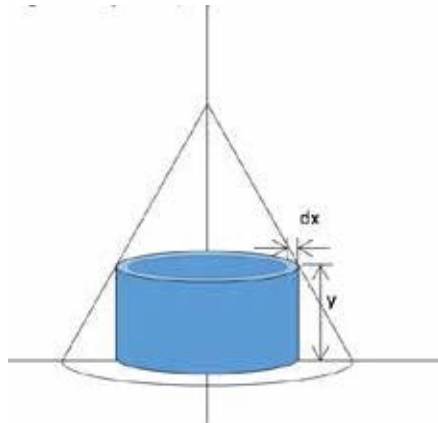
$$V = -\frac{4}{3}\pi \left[(r^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^r = -\frac{4}{3}\pi \left[\sqrt{(r^2 - x^2)^3} \right]_0^r$$

$$= -\frac{4}{3}\pi \left[\sqrt{(r^2 - r^2)^3} - \sqrt{(r^2 - 0^2)^3} \right] = \frac{4}{3}\pi r^3$$

10. Resolver el problema 2 de esta sección usando el método de cilindros diferenciales huecos o casquetes

Figura 21

Ejercicio propuesto 10 sobre Volúmenes



En ese caso conviene poner el cono con la base hacia abajo.

$$dV = 2\pi r h dr = 2\pi x y dx =$$

$$= 2\pi x \left(-\frac{h}{r} x + h \right) dx$$

$$= 2\pi \left(-\frac{h}{r} x^2 + hx \right) dx$$

$$V = 2\pi \int_0^r \left(-\frac{h}{r} x^2 + hx \right) dx$$

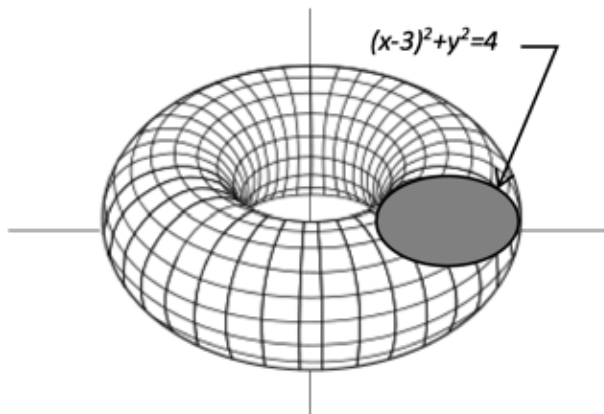
$$V = 2\pi \left[-\frac{h}{r} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^r + h \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^r \right]$$

$$= 2\pi \left[-\frac{hr^3}{3r} + \frac{hr^2}{2} \right] = 2\pi \left[\frac{-2hr^2 + 3hr^2}{6} \right] = \frac{\pi}{3} h r^2$$

11. Hallar el volumen del toroide que se genera al girar alrededor del eje y , la curva $(x-3)^2 + y^2 = 4$

Figura 22

Ejercicio propuesto 11 sobre Volúmenes



$(x-3)^2+y^2=4$ es un círculo de radio $r=2$ con centro en $(2,0)$

En este caso es mejor hacer una traslación del origen al sistema de coordenadas hacia el centro del círculo. La ecuación del círculo será:

$$x^2+y^2=4 \text{ girando alrededor de } x=3$$

$$dV = 2\pi r h dr$$

$$dV = 2\pi(3-x)(2y)dx$$

$$V = 2\pi \int_{-2}^2 (3-x) \left(2\sqrt{4-x^2}\right) dx$$

$$V = 4\pi \int_{-2}^2 3\sqrt{4-x^2} dx - 4\pi \int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$$

$$V = 12\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4\pi \int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$$

$$\text{Primera integral: } \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad \text{Sea: } x = 2\text{Sen}t \rightarrow dx = 2\text{Cost} dt$$

$$\text{Para: } x = -2; t = -\frac{\pi}{2} \quad x = 2; t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4-4\text{Sen}^2t} \ 2\text{Cost} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4(1-\text{Sen}^2t)} \ 2\text{Cost} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\text{Cot} \text{Cost} dt$$

$$= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Cos}^2t dt = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \text{Cos}2t) dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Cos}2t dt$$

$$= 2|t|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2 \left| \frac{\text{Sen} 2t}{2} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] + [\text{Sen}\pi - \text{Sen}(-\pi)] = 2\pi$$

Segunda integral: $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ Sea: $u = 4 - x^2 \rightarrow du = -2x dx \rightarrow dx = -\frac{du}{2x}$

$$= \int_{-2}^2 x\sqrt{u} \cdot \frac{du}{-2x} = -\int_{-2}^2 \sqrt{u} du = -\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^2$$

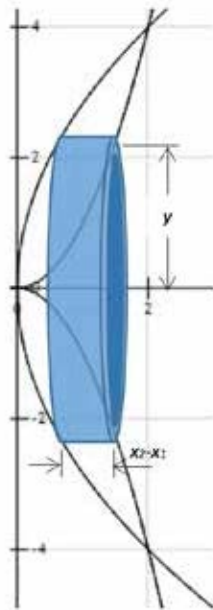
$$= -\frac{2}{3}\left[(4-x^2)^{3/2}\right]_{-2}^2 = -\frac{2}{3}\left[(4-4)^{3/2} - (4-4)^{3/2}\right] = 0$$

$$V = 12\pi(\pi) = 12\pi^2 u^3$$

12. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región comprendida entre $y = x^2$ y $y = \sqrt{8x}$ alrededor del eje x en $[0,3]$

Figura 23

Ejercicio propuesto 12 sobre Volúmenes



Calcular el punto de corte

$$x^2 = \sqrt{8x} \rightarrow x^4 = 8x$$

$$x^3 = \sqrt{8} \rightarrow x = \pm 2 \text{ y } 0$$

$$dV = 2\pi y(x_2 - x_1)dy = 2\pi y\left(\sqrt{y} - \frac{y^2}{8}\right)dy$$

$$V = 2\pi \int_0^4 y\left(\sqrt{y} dy - \frac{2\pi}{8}\right) \int_0^4 y^3 dy$$

$$= 2\pi \int_0^4 y^{3/2} dy - \frac{\pi}{2} \int_0^4 y^3 dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^{5/2}}{5/2} \right]_0^4 - \frac{\pi}{4} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^4$$

$$= \frac{4}{5} \pi (4^{5/2}) - \frac{\pi}{16} (4^4) = \frac{4}{5} \pi (32) - \frac{\pi}{16} (256)$$

$$= \frac{128}{5} \pi - 16\pi = \frac{48}{5} \pi \text{ u}^3$$

13. Use el método de cilindros diferenciales huecos o casquetes para encontrar el volumen del sólido generado al rotar el área bajo la curva $y^2 = 3x^3$ alrededor del eje x en $[0,3]$

$$y^2 = x^3 \rightarrow \sqrt[3]{y^2} = x \text{ ó } y^{2/3} = x$$

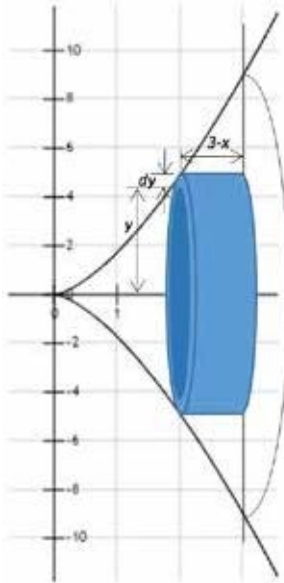
$$\text{Para: } x = 3 \rightarrow y = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$$

$$dV = 2\pi y(3 - x)dy = 2\pi y(3 - y^{2/3})dy$$

$$V = \int_0^{3\sqrt{3}} 2\pi y(3 - y^{2/3}) dy = 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}} (3y - y^{5/3}) dy$$

$$V = 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}} 3y dy - 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}} y^{5/3} dy$$

Figura 24
Ejercicio propuesto 13 sobre Volúmenes

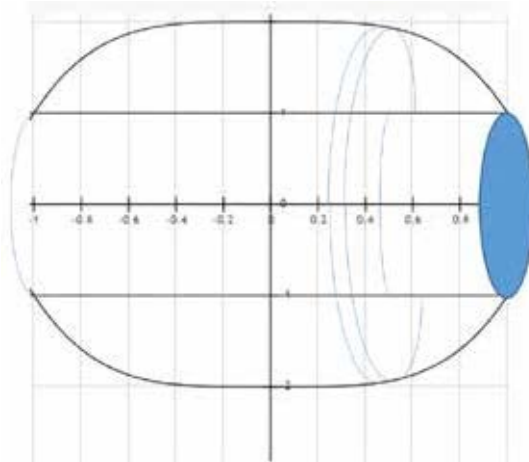


$$\begin{aligned}
 V &= 6\pi \left| \frac{y^2}{2} \right|_{0}^{3\sqrt{3}} - 2\pi \left| \frac{y^{8/3}}{8/3} \right|_{0}^{3\sqrt{3}} = 3\pi[(3\sqrt{3})^2] - \frac{3}{4}\pi[(3\sqrt{3})^{8/3}] \\
 &= 3\pi(9 \cdot 3) - \frac{3}{4}\pi(3^{3/2})^{8/3} = 81\pi - \frac{3}{4}\pi 3^4 = 81\pi - \frac{243}{4}\pi = \frac{81}{4}\pi u^3
 \end{aligned}$$

14. Use el método más apropiado para calcular el volumen que se genera al girar el área comprendida entre $y=2-x^4$ y $y=1$ alrededor del eje x

$$dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)dx = \pi[(2 - x^4)^2 - 1^2]dx$$

Figura 25
Ejercicio propuesto 14 sobre Volúmenes



Límites de Integración:

Para $y = 1$, $x = \pm 1$

$$V = \pi \int_{-1}^1 [(2 - x^4) - 1^2] dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 (4 - 4x^4 + x^8 - 1) dx$$

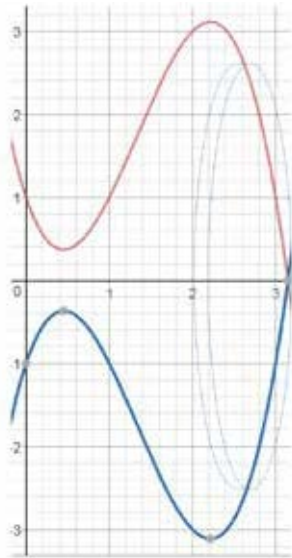
$$V = \pi \left[3|x| \Big|_{-1}^1 - 4 \left| \frac{x^5}{5} \right| \Big|_{-1}^1 + \left| \frac{x^9}{9} \right| \Big|_{-1}^1 \right]$$

$$= \pi [3(1 - (-1)) - 4 \left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) \right] + \left[\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{9} \right) \right]] = \left(\pi(6) - 4 \left(\frac{2}{5} \right) + \frac{2}{9} \right) = \frac{208}{45} \pi$$

15. Use el método más apropiado para calcular el volumen que se genera al girar el área bajo la curva $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

Figura 26

Ejercicio propuesto 15 sobre Volúmenes



$$dV = \pi y^2 dx$$

$$V = \pi \int y^2 dx = \pi \int_0^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x + 1)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^3 (x^6 - 8x^5 + 22x^4 - 26x^3 + 17x^2 - 6x + 1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^3 - 8 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^3 + 22 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^3 - 26 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^3 + 17 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 - 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 + |x|_0^3 =$$

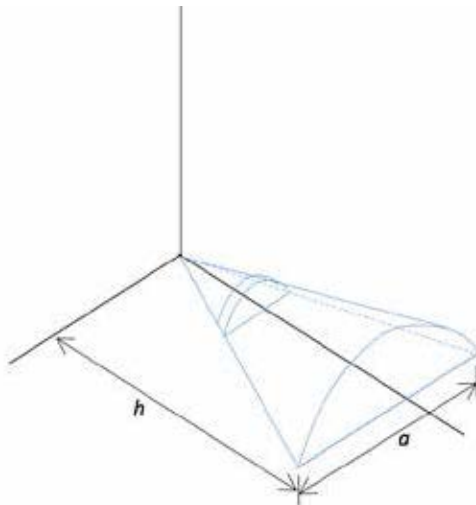
$$= \pi \left[\frac{3^7}{7} - \frac{4}{3} 3^6 + \frac{22}{5} 3^5 - \frac{13}{2} 3^4 + \frac{17}{3} (3^3) - 3(9) + 3 \right] = \frac{849}{70} \pi u^3$$

Solución ejercicios propuestos sobre Volumen de Sección Recta Conocida

1. Encontrar el volumen de un cono cortado por la mitad por un plano que pasa por su eje de simetría. La base del cono es un semicírculo de radio "a" y la altura del cono es "h"

Figura 27

Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



$$dV = \frac{1}{2} \pi r^2 dx$$

Observe que en el plano yz se forman dos triángulos rectángulos cuyos catetos son para el triángulo mayor, a y h y para el triángulo menor, r y x .

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \rightarrow r = \frac{a}{h}x$$

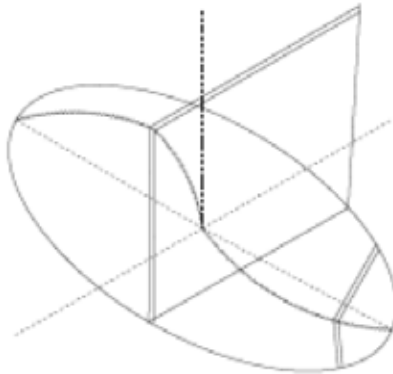
$$dV = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a^2}{h^2} x^2 \right) dx \quad V = \frac{1}{2}\pi \frac{a^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{a}{2h} \pi \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^h = \frac{a\pi}{2h} \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{6} a^2 h$$

2. Hallar el volumen de un sólido de base un círculo de radio $r=4$, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al diámetro es un cuadrado

Figura 28

Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



Ecuación del círculo de base: $x^2 + y^2 = 16$

Área del cuadrado perpendicular a la base:

$$A = (2y)(2y) = 4y^2$$

Despejando de la ecuación del círculo:

$$y^2 = 16 - x^2 \quad A = 4(16 - x^2)$$

$$V = \int_0^4 4(16 - x^2)dx = \int_0^4 (64 - 4x^2)dx$$

$$V = 64|x|_0^4 - 4\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = 64(4) - \frac{4}{3}(4^3) = 256 - \frac{256}{3} = \frac{512}{3}$$

Ya que los límites de integración fueron 0 y 4, el volumen total será el doble

$$V = 2\left(\frac{512}{3}\right) = \frac{1024}{3} \approx 341,33 \text{ u}^3$$

3. Encontrar el volumen de un sólido cuya base es la región entre una arcada de $y=\text{sen}x$ y el eje x . cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero sobre la base

Figura 29

Ejercicio propuestos sobre volumen de sección recta conocida



Lado del triángulo $l = \text{sen}x$

altura del triángulo $h = \text{sen}60^\circ \text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}x$

Área del triángulo $A = \frac{bh}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}^2 x$

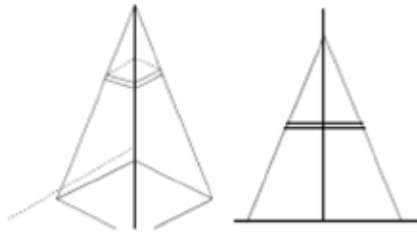
Diferencial de volumen $dV = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}^2 x dx$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\pi} \text{Sen}^2 x dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \text{Cos} 2x) dx = \frac{\sqrt{3}}{8} \left[\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \text{Cos} 2x dx \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8} \left(x \Big|_0^{\pi} - \frac{\text{Sen} 2x}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} (\pi - (0 - 0)) = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi u^3
 \end{aligned}$$

4. Encontrar el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado b y altura h

Figura 30

Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



$$dV = l^2 dy \rightarrow V = \int_0^h (2x)^2 dy$$

Para poner $x = f(y)$ y poder integrar:

La ecuación de la recta del lado de la

pirámide es $y = -\frac{h}{b/2}x + h$

$$y = -\frac{2h}{b}x + h \rightarrow x = -(y - h) \frac{b}{2h}$$

$$x = -\frac{b}{2h}y + \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{b}{h}y + b \right)$$

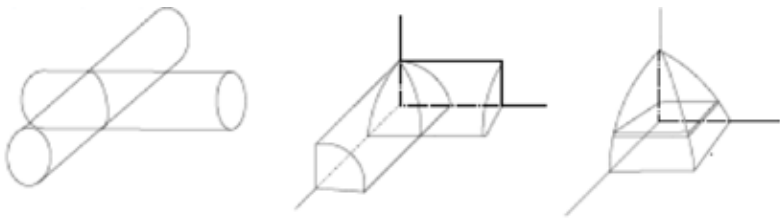
$$\text{Reemplazando: } V = \int_0^h \frac{4}{4} \left(-\frac{b}{h}y + b \right)^2 dy = \int_0^h \left(b^2 - 2\frac{b^2}{h}y + \frac{b^2}{h^2}y^2 \right) dy$$

$$\begin{aligned}
 V &= b^2 |y|_0^h - 2 \frac{b^2}{h} \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^h + \frac{b^2}{h^2} \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^h = b^2 h - \frac{b^2 h^2}{h} + \frac{1}{3} \frac{b^2}{h^2} h^3 \\
 &= b^2 h - b^2 h + \frac{1}{3} b^2 h = \frac{b^2 h}{3} u^3
 \end{aligned}$$

4. Calcular el volumen del sólido generado al intersecar dos cilindros rectos perpendiculares

Figura 3l

Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



$$\text{Como: } z^2 + x^2 = r^2 \quad y \quad z^2 + y^2 = r^2$$

$$z^2 + x^2 = z^2 + y^2 \quad x^2 = y^2 \rightarrow x = y$$

$$dV = xydz = yydz$$

$$V = \int_0^r y^2 dz \quad y^2 = r^2 - z^2$$

$$V = \int_0^r (r^2 - z^2) dz$$

$$V = \int_0^r r^2 dz - \int_0^r z^2 dz = r^2 |z|_0^r - \left| \frac{z^3}{3} \right|_0^r = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2}{3} r^3$$

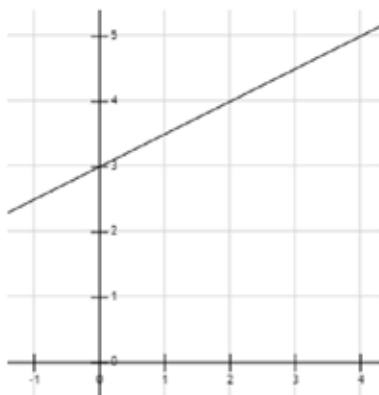
Como la sección representada es la octava parte del volumen total buscado, entonces,

$$V_t = 8 \left(\frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{16}{3} r^3 u^3$$

Solución ejercicios propuestos sobre Cálculo de Longitud de Arco

1. Encontrar la longitud de la curva $y = \frac{1}{2}x + 3$ en $[0, 4]$. Compruebe ese resultado usando los conocimientos adquiridos en Geometría Analítica

Figura 32
Ejercicio sobre Longitud de Arco



$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \frac{1}{2}$$

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{5}{4}} dx = \sqrt{\frac{5}{4}} x \Big|_0^4$$

$$S = \sqrt{\frac{5}{4}}(4) = 2\sqrt{5}$$

Comprobación con la fórmula de la distancia:

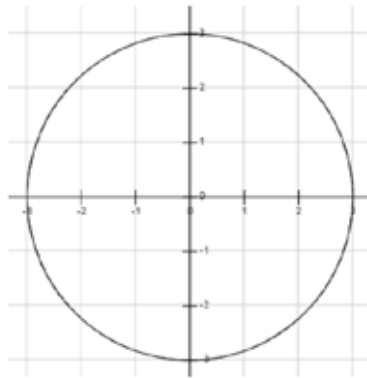
en $x = 0; y = 3$; en $x = 4; y = 5$

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$d = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

2. Calcular la longitud del arco de circunferencia de radio 3 que forma un ángulo de 60° con el eje x positivo. Comprobar la respuesta usando la fórmula para calcular el arco de circunferencia conociendo ángulo y radio

Figura 33
Ejercicio sobre Longitud de Arco



$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{3}: x = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ec. de la Circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$$S = \int_{3/2}^3 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} dx = \int_{3/2}^3 \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} dx = \int_{3/2}^3 \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{9} \int_{3/2}^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \sqrt{9} \left[\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) \right]_{3/2}^3 = 3 \left[\arcsen(1) - \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= 3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 3 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{9} \frac{2\pi}{3} = \end{aligned}$$

Comprobar con la fórmula de arco de círculo $S = r\theta = 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \pi$

Note que la respuesta por integración es el doble que aplicando la fórmula. Esto se debe a que el arco calculado es el que forma entre $+\pi/3$ y $-\pi/3$.

Esto se puede comprobar integrando sobre “y”.

$$S = \int_0^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$$

Derivando con respecto “y”

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad 2x \frac{dx}{dy} + 2y = 0 \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

$$S = \int_0^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\left(-\frac{y}{x}\right)^2 + 1} dy = \int_0^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}} dy = \int_0^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{9}{9 - y^2}} dy$$

$$= 3 \int_0^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dy}{\sqrt{9 - y^2}} = 3 \left[\arcsen\left(\frac{y}{3}\right) \right]_0^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3 \left[\arcsen\frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} - \arcsen 0 \right] =$$

$$3 \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) = 3 \frac{\pi}{3} = \pi$$

Como se puede apreciar, integrando con respecto a y y no fue necesario dividir para 2, la respuesta es directa.

3. Hallar la longitud del arco de la curva $y = \sqrt{x^3}$ en $[0,5]$

Figura 34
Ejercicio sobre Longitud de Arco



$$y = x^{3/2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx$$

$$\text{Sea: } 1 + \frac{9}{4}x = z^2 \rightarrow x = \frac{4}{9}(z^2 - 1)dx = \frac{8}{9}z dz$$

$$S = \int_1^{7/2} z \left(\frac{8}{9}z dz \right) = \frac{8}{9} \int_1^{7/2} z^2 dz = \frac{8}{9} \left| \frac{z^3}{3} \right|_1^{7/2}$$

$$S = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{7}{2} \right)^3 - 1^3 \right] = \frac{8}{27} \left(\frac{343}{8} - 1 \right)$$

Cambiando límites

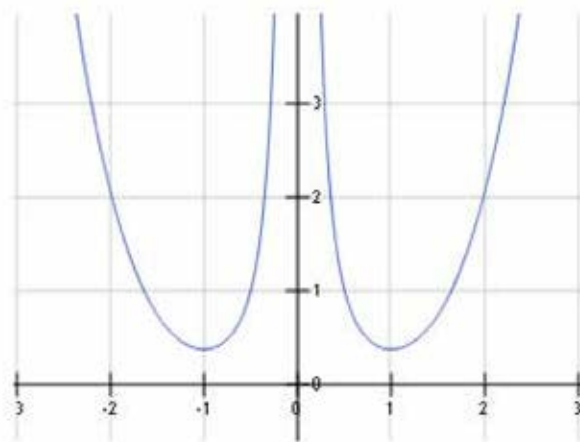
$$\text{Para: } x = 0; z = 1$$

$$x = 5; z = \frac{7}{2}$$

$$S = \frac{8}{27} \left(\frac{343 - 8}{8} \right) = \frac{335}{27} \approx 12.407$$

4. Hallar la longitud del arco de la curva $y = \frac{x^4}{8} + \frac{x^{-2}}{4}$ $[1/2, 2]$

Figura 35
Ejercicio sobre Longitud de Arco



$$y' = \frac{x^3}{2} - \frac{x^{-3}}{2} = \frac{1}{2}(x^3 - x^{-3})$$

$$S = \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(x^3 - x^{-3})\right]^2} dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(x^6 - 2x + x^{-4})} dx$$

$$S = \int_{1/2}^2 \frac{\sqrt{4 + x^6 - 2x + x^{-6}}}{4} dx$$

$$\int_{1/2}^2 \frac{\sqrt{x^6 + 2 + x^{-6}}}{4} dx \rightarrow S = \int_1^2 \frac{\sqrt{(x^3 + x^{-3})^2}}{4} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^3 + x^{-3}) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \Big|_1^2 + \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^2 \right] \rightarrow S = \frac{1}{2} \left[\frac{2^4 - (1)^4}{4} - \frac{2^{-2} - (1)^{-2}}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{16 - 1}{4} - \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} \right]$$

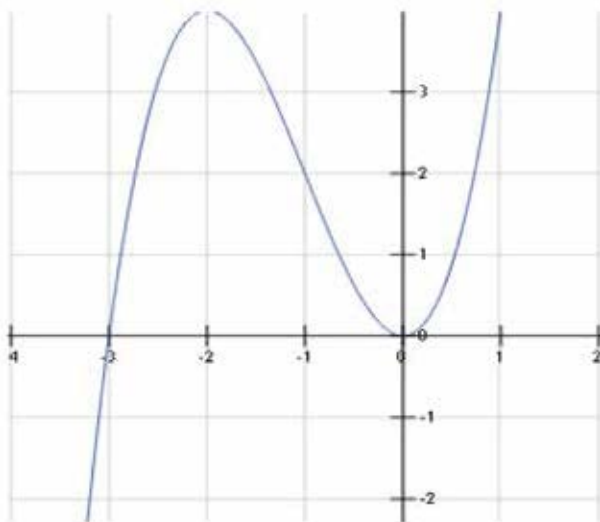
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{8} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{30 + 3}{8} \right) = \frac{33}{16}$$

5. Hallar la longitud del arco de curva forma en $[-3,1]$ de $y = x^3 + 3x^2$

$$S = \int_{-3}^1 \sqrt{1 + (3x^2 + 6x)^2} dx$$

$$\int_{-3}^1 \sqrt{1 + 9x^4 + 36x^3 + 36x^2} dx$$

Figura 36
Ejercicio sobre Longitud de Arco



En este caso es mejor usar las técnicas de integración por aproximación, usando rectángulos vista al inicio de la sección del capítulo de integral definida, debido a la complejidad por el radical.

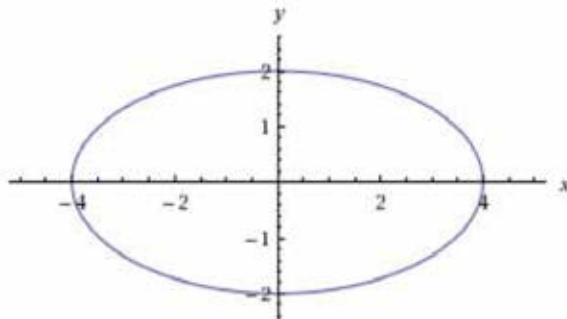
$$S = 13.0371$$

Solución ejercicios propuestos sobre Cálculo de Áreas de Superficies de Revolución

1. Encontrar el área de la superficie que envuelve el sólido generado al rotar la curva $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ alrededor del eje x .

Figura 37

Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución



$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$Ax = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$y = 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \frac{dy}{dx}$$

$$= 2(1 - \frac{x^2}{16})^{1/2} \cdot (-\frac{x}{8}) \rightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$Ax = 2\pi \int_0^4 \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2} \sqrt{1 + (-\frac{x}{2\sqrt{16 - x^2}})^2} dx$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4(16 - x^2)}} dx = \pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{\frac{64 - 4x + x^2}{4(16 - x^2)}}$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \frac{\sqrt{64 - 3x^2}}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^4 \sqrt{64 - 3x^2} dx$$

$$\text{Sea: } \sqrt{3}x = 8\text{Sent}; x = \frac{8}{\sqrt{3}}\text{Sent}; dx = \frac{8}{\sqrt{3}}\text{Cot } dt; \text{Sent} = \frac{\sqrt{3}x}{8}$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^4 \sqrt{64 - 3\frac{64}{3}\text{Sen}^2 t} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \text{Cot } dt = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \int_0^4 8\text{Cos}^2 t dt$$

$$\frac{32\pi}{\sqrt{3}} \int_0^4 \frac{1}{2} (1 + \text{Cos} 2t) dt = \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \int_0^4 dt + \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \int_0^4 \text{Cos} 2t dt$$

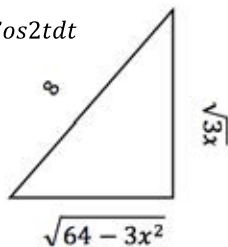
$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}} |t|_0^4 + \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left| \frac{\text{Sen} 2t}{2} \right|_0^4 \text{ Pero } \text{Sen} 2t = 2\text{SentCost}$$

$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}} |t|_0^4 + \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left| \frac{2\text{SentCost}}{2} \right|_0^4$$

$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left| \text{arcSen} \left(\frac{\sqrt{3}x}{8} \right) \right|_0^4 + \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3}x}{8} \cdot \frac{64 - 3x^2}{8} \right|_0^4$$

$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left[\text{arcSen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \text{arcSen}(0) \right] + \frac{1}{64} \left[\sqrt{3} (4) \sqrt{64 - 3(16) - 0} \right]$$

$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{64} \cdot 16\sqrt{3} \right] = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} + 4\pi = 42.96$$



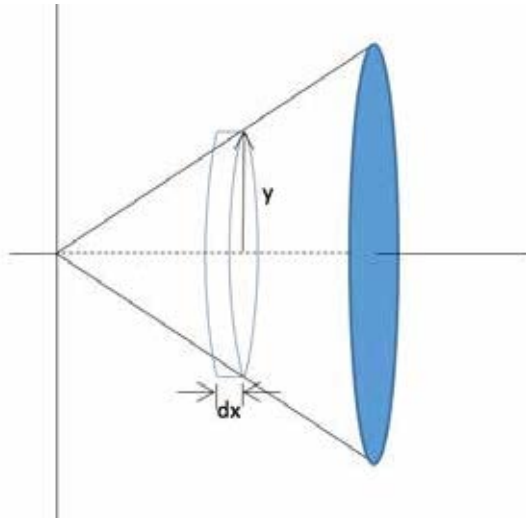
El área total es el doble de ese valor al tomar en cuenta el lado izquierdo de la elipse

$$AT = 85.91u^2$$

2. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de $y=mx$ alrededor del eje x en $[0,2]$. ¿Qué figura forma?

Figura 38

Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución



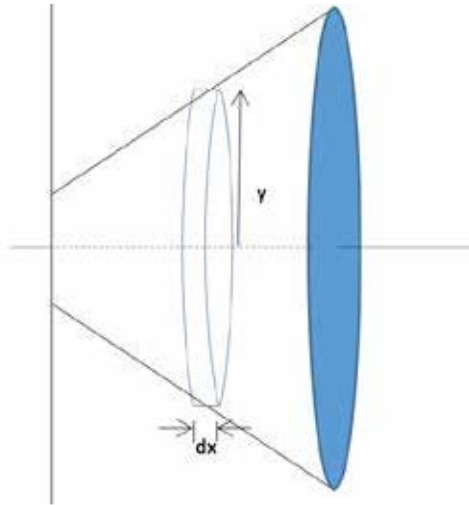
$$y = mx \quad \frac{dy}{dx} = m$$

$$\begin{aligned} Ax &= 2\pi \int_0^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^2 mx \sqrt{1 + m^2} dx \\ &= 2\pi m \sqrt{1 + m^2} \int_0^2 x dx = 2\pi m \sqrt{1 + m^2} \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^2 \end{aligned}$$

$$Ax = 2\pi m\sqrt{1+m^2} \left[\frac{4}{2} \right] = 4\pi m\sqrt{1+m^2} \text{ (área de lateral de un cono)}$$

3. Calcular el área de la superficie generada en la rotación de $y=mx+b$ alrededor del eje x en $[0,2]$. ¿Qué figura forma?

Figura 39
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución



$$y = mx + b \quad \frac{dy}{dx} = m$$

$$Ax = 2\pi \int_0^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^2 (mx + b) \sqrt{1 + m^2} dx$$

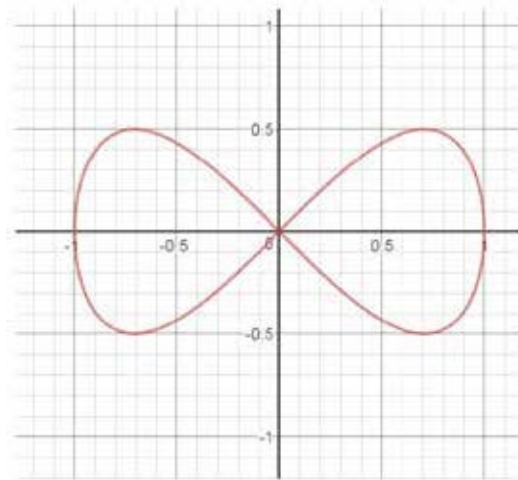
$$Ax = 2\pi \sqrt{1 + m^2} \int_0^2 (mx + b) dx$$

$$Ax = 2\pi \sqrt{1 + m^2} \left[m \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^2 - b|x| \right]_0^2 = 2\pi \sqrt{1 + m^2} (2m + 2b)$$

$$Ax = 4\pi \sqrt{1+m^2}(m+b) \text{ (área lateral de un tronco de cono)}$$

4. Hallar el área de la superficie de revolución que se forma al rotar la curva $8y^2 = x^2 - x^4$ sobre el eje x

Figura 40
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución



$$8y^2 = x^2 - x^4 \rightarrow y = \sqrt{\frac{x^2 - x^4}{8}}$$

$$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[x \frac{1}{2} (1-x^2)^{-1/2} (-2x) + \sqrt{1-x^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{-x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

Cálculo del intervalo:

$$y = 0 \text{ en } x^2(1 - x^2) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1$$

$$Ax = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]^2} dx$$

$$Ax = 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{(1-2x^2)^2}{1-x^2}} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{8-8x^2+1-4x^2+4x^4}{8(1-x^2)}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{(3-2x^2)^2}}{8} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x(3-2x^2) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (3x-2x^3) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[3 \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - 2 \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^1 \right] = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} u^2$$

Como el área calculada es solo la del lado derecho, ya que la función es par, es decir, simétrica con respecto al eje y, entonces

$$AT = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} u^2$$

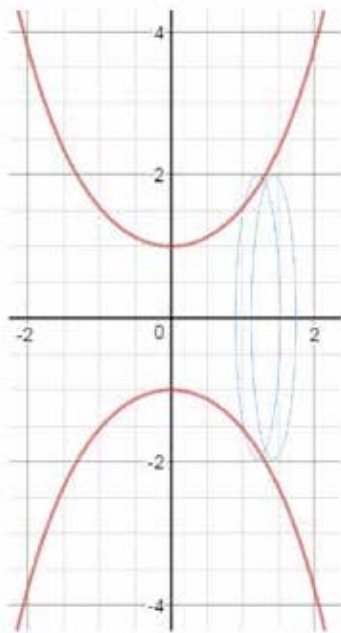
5. Calcular el área de la superficie que se forma al girar alrededor del eje x la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $[-2, 2]$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad y = \cosh x \quad y' = \sinh x$$

$$Ax = 2\pi \int_{-2}^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^2 \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} \, dx$$

Figura 41
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución



Usando las identidades de funciones hiperbólicas:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$Ax = 2\pi \int_{-2}^2 \cosh x \sqrt{\cosh^2 x} \, dx = 2\pi \int_{-2}^2 \cosh^2 x \, dx$$

$$Ax = 2\pi \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1) \, dx = \pi \left[\int_{-2}^2 \cosh 2x \, dx + \int_{-2}^2 dx \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Sea: } 2x = u &\rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2} \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} \int_{-2}^2 \cosh u \, du + \int_{-2}^2 dx \right] = \pi \left[\frac{1}{2} [\sinh 2x]_{-2}^2 + [x]_{-2}^2 \right] \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{2} [\sinh(4) - \sinh(-4)] + (2 + 2) \right\} = \pi \left\{ \frac{1}{2} [27.29 - (-27.29)] + 4 \right\} \\ &= 98.30 \, u^2 \end{aligned}$$

Solución ejercicios propuestos sobre Trabajo

1. Se conoce que para estirar 1 cm un resorte de 12 cm de largo en estado natural, se requiere 80N. Calcular el trabajo necesitado para estirarlo: a) desde 12 a 15 cm b) desde 15 a 16 cm.

$$a) K = \frac{80N}{0,01m} = 8000 \frac{N}{m}$$

$$T = \int_{0,00}^{0,03} F(x)dx = \int_{0,00}^{0,03} Kx dx = 8000 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0,00}^{0,03} = 4000(0,03^2) = 3.6N \cdot m = 3.6J$$

$$b) T = \int_{0,03}^{0,04} 8000x dx = 8000 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0,03}^{0,04} = 4000[0,04^2 - 0,03^2] = 2.8J$$

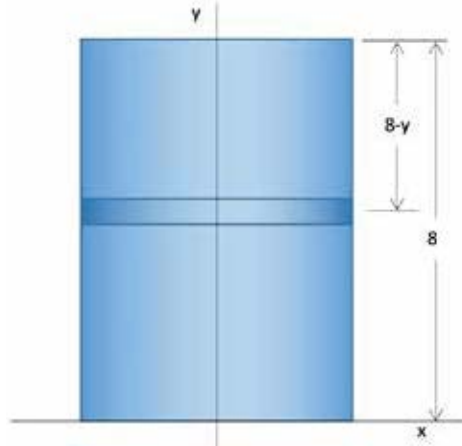
2. Un tanque de forma cilíndrica de 5m de diámetro y 8m de profundidad, está llena de agua (1000 kp/m³). Calcular el trabajo para bombear el agua hasta el borde superior de la cisterna

$$dP = \gamma dv = \pi x^2 dy$$

$$dT = \gamma \pi x^2 (8 - y) dy \quad T = \int_0^8 \gamma \pi x^2 (8 - y) dy$$

Como $x = 2.5$ para todo y

Figura 42
Ejercicio sobre Trabajo



(ecuación de una recta vertical)

$$T = 6.25\pi\gamma \int_0^8 (8-y)dy = 6.25\gamma\pi \left[\int_0^8 8dy - \int_0^8 ydy \right]$$

$$T = 6.25\pi\gamma \left[8|y| \Big|_0^8 - \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^8 \right] = 6.25\gamma\pi(64 - 32)$$

$$= 6.25(1000)(\pi)(32) = 200.000\pi$$

3. Si el tanque del problema 2 tiene agua hasta los 5m de profundidad. Calcule el trabajo para bombear el agua igualmente hasta el borde del tanque

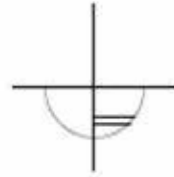
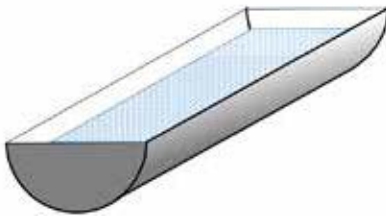
$$dP = \gamma dv = \pi x^2 dy = \pi(2.5)^2 dy = 6.25\pi dy$$

$$T = \gamma\pi(6.25) \int_0^5 (8-y)dy = 6.25\gamma\pi \left[8y \Big|_0^5 - \frac{y^2}{2} \Big|_0^5 \right]$$

$$= 6.25\gamma\pi \left[40 - \frac{25}{2} \right] = 171875\pi$$

4. Calcular el trabajo necesario para llevar agua hasta el extremo superior del depósito de la figura 35. El largo del tanque es 50p y el diámetro es 20p, suponiendo que dicho recipiente se encuentra 7p lleno.

Figura 43
Ejercicio sobre Trabajo



$$dP = \gamma dv = [\gamma \times dy(50)]$$

$$dP = 50\gamma\sqrt{100 - y^2}dy$$

$$T = 2(50\gamma) \int_{-10}^{-3} (\sqrt{100 - y^2} dy) (-y)$$

$$T = -980000 \int_{-10}^{-3} y\sqrt{100 - y^2} dy$$

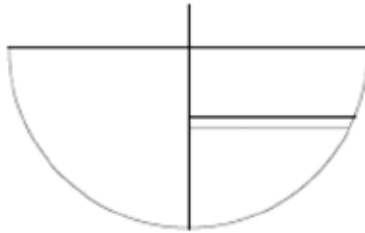
$$\text{Sea: } u = 100 - y^2 \rightarrow du = -ydy \rightarrow ydy = -\frac{du}{2}$$

$$T = -9800 \int_{-10}^{-3} \frac{1}{2} u^{1/2} du = -4900 \left(\frac{u^{3/2}}{3/2} \right) = -3266,67 \left| \sqrt{(100 - y^2)^3} \right|_{-10}^{-3}$$

$$= 1805,62 \text{ tb-p}$$

5. Un tanque semiesférico está lleno de petróleo. Calcular el trabajo necesario para llevar todo el petróleo hasta la superficie

Figura 44
Ejercicio sobre Trabajo



$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x^2 = \sqrt{100 - y^2}$$

$$dP = \gamma dv = \gamma \pi x^2 dy$$

$$dT = \int_{-10}^0 \gamma \pi x^2 dy (-y) = -\gamma \pi \int_{-10}^0 x^2 y dy$$

$$= -\gamma \pi \int_{-10}^0 y \sqrt{100 - y^2} dy$$

$$\text{Sea: } u = 100 - y^2 \rightarrow du = -2y dy \rightarrow y dy = -\frac{du}{2}$$

$$dT = -\gamma \pi \int_{-10}^0 u^{1/2} \left(-\frac{du}{2}\right) = \gamma \frac{\pi}{2} \int_{-10}^0 u^{1/2} du = \frac{\gamma \pi}{2} \left| \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_{-10}^0$$

$$dT = \frac{\gamma \pi}{2} \left| \frac{(100 - y^2)^{3/2}}{3/2} \right|_{-10}^0 = \frac{\gamma \pi}{3} ((\sqrt{(100 - 0^2)})^3 - \sqrt{(100 - (-10)^2)^3})$$

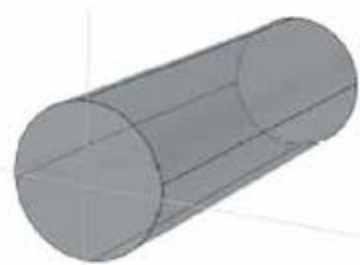
$$= \frac{\gamma \pi}{3} \sqrt{1'000.000} = \frac{800\,000\pi}{3}$$

Solución ejercicios propuestos sobre Fuerza Ejercida por un Líquido

1. Un tanque con forma cilíndrica circular recta con petróleo hasta la mitad de su altura descansa sobre el lado circular como muestra la figura. Las medidas del tanque son: $8p$ de diámetro y $24p$ de longitud. Determine la fuerza total ejercida por el fluido contra una de las caras circulares. (peso específico del petróleo $50 \text{ lb}/p^3$)

Figura 45

Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido



$$dF = \gamma dAh = \gamma(2ydx)x$$

$$F = \int 2\gamma yx dx = 2\gamma \int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$$

$$\text{Sea: } u = 16 - x^2 \rightarrow du = -2x dx \rightarrow x dx = -\frac{du}{2}$$

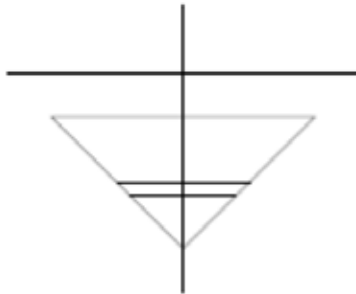
$$F = 2\gamma \int_0^4 u^{1/2} \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{2\gamma}{2} \int_0^4 u^{1/2} du$$

$$\begin{aligned}
 &= -\gamma \left| \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_0^4 = -\frac{2\gamma}{3} \left| u^{3/2} \right|_0^4 = -\frac{2}{3} \gamma \left| \sqrt{(16-x^2)^3} \right|_0^4 \\
 &= -\frac{2}{3} \left(50 \frac{lb}{p^3} \right) \left[\sqrt{(16-16)^3} - \sqrt{(16-0)^3} \right] = -\frac{100}{3} \left[(-\sqrt{16^3}) \right] = -\frac{100}{3} \sqrt{16^2 \cdot 16} \\
 &= \frac{100}{3} (16)(4) = \frac{6400}{3} = 2133.33 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

2. Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la superficie triangular sumergida de lados 5m, 5m, 8m con el lado mayor estando paralelo a la superficie del líquido y situado 3m por debajo del nivel ($\gamma_{H2O} = 1000 \text{ kp/m}^3$)

Figura 46

Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido



Para simplificar el problema, el eje x será positivo hacia abajo y el eje y será positivo hacia la derecha.

Cálculo de la coordenada del vértice inferior

$$x = 3 + \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 + \sqrt{9} = 6 \text{ (Pitágora)}$$

Ec. de la Recta que pasa por el cateto sobre el eje x

$$y - 0 = \frac{4 - 0}{3 - 6} (x - 6) \rightarrow y = -\frac{4}{3} (x - 6)$$

$$y_2 = -\frac{4}{3}x + 8$$

Ec. de la Recta que pasa por el cateto bajo el eje x.

$$y-0 = \frac{0 - (-4)}{6 - 3}(x-6) \rightarrow y_1 = \frac{4}{3}x - 8$$

$$df = \gamma dAh = \gamma((y_2 - y_1)dx)x \rightarrow F = \gamma \int_3^6 (y_2 - y_1) x dx$$

$$y_2 - y_1 = -\frac{4}{3}x + 8 - \left(\frac{4}{3}x - 8\right) = -\frac{4}{3}x + 8 - \frac{4}{3}x + 8 = -\frac{8}{3}x + 16$$

$$F = \gamma \int_3^0 \left(-\frac{8}{3}x + 16\right) x dx = \gamma \left[\int_3^6 \left(-\frac{8}{3}x^2 dx\right) + \int_3^6 16x dx \right]$$

$$= \gamma \left[-\frac{8}{3} \left| \frac{x^3}{3} \right|_3^6 + 16 \left| \frac{x^2}{2} \right|_3^6 \right] = \gamma \left[-\frac{8}{9} (6^3 - 3^3) + 8(6^2 - 3^2) \right]$$

$$= \gamma \left[-\frac{8}{9} (189) + 8(27) \right] = \gamma(-168 + 216) = 48\gamma = 48000 \text{ Kp.}$$

3. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre una compuerta circular de 4p de radio cuyo lado superior se encuentra 2p por debajo del nivel del agua (peso específico del agua 62.4 lb/p³)

Igual que el ejercicio anterior, el eje x es positivo hacia abajo y el eje y, positivo hacia la derecha.

$$dF = \gamma dA(6 + x) = \gamma(2y dx)(6 + x)$$

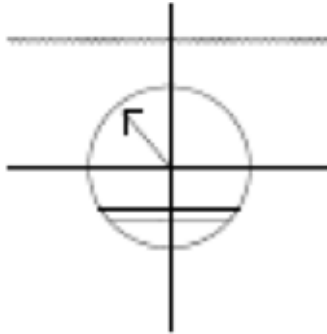
$$= 2\gamma \sqrt{16 - x^2} (6 + x) dx$$

$$F = 2\gamma \int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} (6 + x) dx$$

$$F = 2\gamma \left[6 \int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} (6 + x) dx + \int_{-4}^4 x \sqrt{16 - x^2} dx \right]$$

Figura 47

Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido



Haciendo las siguientes sustituciones en la primera integral:

$$x = 4\text{Sent} \rightarrow dx = 4\text{Cost} dt$$

Segunda integral

$$u = 16 - x^2 \rightarrow du = -2x dx \rightarrow x dx = -\frac{du}{2}$$

Haciendo los cambio de límites para la 1era Integral:

$$\text{Para: } x = -4; -4 = 4\text{Sent} \rightarrow -1 = \text{Sent} \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Para: } x = 4; 4 = 4\text{Sent} \rightarrow 1 = \text{Sent} \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

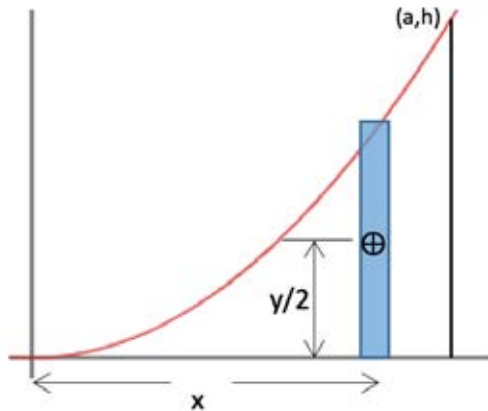
$$F = 2\gamma \left[6 \int_{-4}^4 \sqrt{16 - 16\text{Sen}^2 t} \cdot 4\text{Cost} dt + \int_{-4}^4 u^{1/2} \left(-\frac{du}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
F &= 2\gamma \left[6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16(1 - \text{Sen}^2 t)} \cdot 4 \text{Cost} \, dt - \frac{1}{2} \int_{-4}^4 u^{1/2} du \right] \\
&= 2\gamma \left[6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 \text{Cos}^2 t} \cdot 4 \text{Cost} \, dt - \frac{1}{2} \left| \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_{-4}^4 \right] \\
&= 2\gamma \left[6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \text{Cost} \cdot 4 \text{Cot} \, dt - \frac{1}{3} \left| u^{3/2} \right|_{-4}^4 \right] \\
&= 2\gamma \left[96 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^2 t \, dt - \frac{1}{3} \left| \sqrt{(16 - x^2)^3} \right|_{-4}^4 \right] \\
&= 2\gamma \left[96 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \text{Cos} 2t) \, dt - \frac{1}{3} \left[\sqrt{(16 - 16)^3} - \sqrt{(16 - 16)^3} \right] \right] \\
&= 96\gamma \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos} 2t \, dt \right] = 96\gamma \left[\left| t \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left| \frac{\text{Sen} 2t}{2} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] \\
F &= 96\gamma \left[\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} (0 - 0) \right] = 96\gamma\pi = 18819 \, lb
\end{aligned}$$

Solución de ejercicios propuestos sobre Centroides y Momento de Inercia

1. Encontrar una fórmula que sirva para encontrar la posición del centroide de la enjuta parabólica dada en forma general por $y=kx^2$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto (a,h)

Figura 48
Ejercicio sobre Centroide

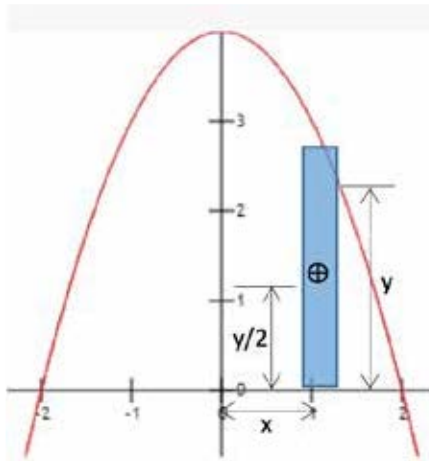


$$\bar{x} = \frac{\int_0^a xy \, dx}{\int_0^a y \, dx} = \frac{\int_0^a x k x^2 \, dx}{\int_0^a k x^2 \, dx} = \frac{\left| \frac{x^4}{4} \right|_0^a}{\left| \frac{x^3}{3} \right|_0^a}$$
$$= \frac{3}{4} \frac{a^4}{a^3} = \frac{3}{4} a$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_0^a \frac{y}{2} y \, dx}{\int_0^a y \, dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^a y^2 \, dx}{\int_0^a y \, dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^a k^2 x^4 \, dx}{\frac{1}{2} \int_0^a k x^2 \, dx} = \frac{1}{2} \frac{k^2 \left| \frac{x^5}{5} \right|_0^a}{k \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^a} \\ &= \frac{1}{2} k \frac{\frac{a^5}{5}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{1}{2} k \frac{3}{5} a^2 = \frac{3}{10} ka^2 \text{ Pero } ka^2 = h \\ \bar{y} &= \frac{3}{10} h\end{aligned}$$

2. Encuentre el centroide del área bajo la curva de la parábola $y=4-x^2$ en $[-2,2]$.

Figura 49
Ejercicio sobre Centroide



$$\bar{x} = \frac{\int_{-2}^2 xy \, dx}{\int_{-2}^2 y \, dx} = \frac{\int_{-2}^2 x(4 - x^2) \, dx}{\int_{-2}^2 (4 - x^2) \, dx} = \frac{\int_{-2}^2 (4x - x^3) \, dx}{\int_{-2}^2 (4 - x^2) \, dx}$$

$$\bar{x} = \frac{4 \left| \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^2 - \left| \frac{x^4}{4} \right|_{-2}^2}{4 \left| x \right|_{-2}^2 - \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^2} = \frac{2(4-4) - \frac{1}{4}(16-16)}{4[2 - (-2)] - \frac{1}{3}[8 - (-8)]} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{-2}^2 \frac{y}{2} dx}{\int_{-2}^2 y dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_{-2}^2 y^2 dx}{16 - \frac{16}{3}} = \frac{1}{2} \frac{\int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx}{32/3}$$

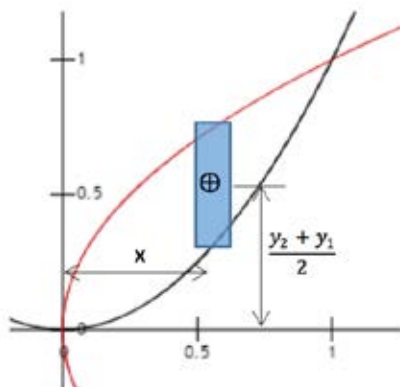
$$= \frac{1}{2} \frac{\int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx}{32/3} = \frac{1}{2} \frac{16 \left| x \right|_{-2}^2 - 8 \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^2 + \left| \frac{x^5}{5} \right|_{-2}^2}{32/3}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{16[2 - (-2)] - \frac{8}{3}[2^3 - (-2)^3] + \frac{1}{5}[2^5 - (-2)^5]}{32/3} = \frac{8}{5}$$

El centroide se encuentra en $(0, 8/5)$ ubicado sobre el eje y como se esperaba por ser una función simétrica con respecto al eje y .

3. Encontrar el centroide del área encerrada por las curvas $y = \sqrt{x}$; $y = x^2$

Figura 50
Ejercicio sobre Centroide



Puntos de intersección:

$$\sqrt{x} = x^2 \quad x = x^4 \rightarrow x^4 - x = 0 \quad x(x^3 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \quad y_1 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 x(y_2 - y_1) dx}{\int_0^1 (y_2 - y_1) dx} = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx}{\int_0^1 (x^{1/2} - x^2) dx} = \frac{\left| \frac{x^{5/2}}{5/2} \right|_0^1 - \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^1}{\left| \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^1 - \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^1} = \frac{\frac{2}{5}(1) - \frac{1}{4}(1)}{\frac{2}{3}(1) - \frac{1}{3}(1)} = \frac{\frac{8-5}{20}}{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) (y_2 - y_1) dx}{\int_0^1 dA} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x} + x^2}{2} \right) (\sqrt{x} - x^2) dx}{1/3}$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^2 \sqrt{x} + x^2 \sqrt{x} - x^4) dx$$

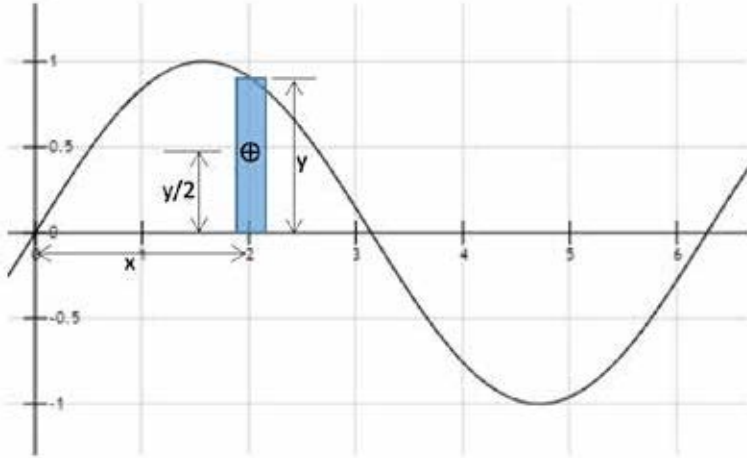
$$\bar{y} = \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{2} \left[\left| \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \left| \frac{x^5}{5} \right|_0^1 \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{2} \left(\frac{5-2}{10} \right)$$

$$\bar{y} = \frac{9}{20} \quad C \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20} \right)$$

4. Encontrar el centroide del área bajo la curva $y = \sin x$ en $[0, \pi]$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\pi x dA}{\int_0^\pi dA} = \frac{\int_0^\pi xy dx}{\int_0^\pi y dx} = \frac{\int_0^\pi x \sin x dx}{\int_0^\pi \sin x dx}$$

Figura 5l
Ejercicio sobre Centroide



$$\text{Sea: } u = x \rightarrow du = dx \quad dv = \text{Sen}x \, dx \rightarrow v = -\text{Cos}x$$

$$\int_0^{\pi} x \text{Sen}x \, dx = [-x \text{Cos}x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\text{Cos}x) \, dx = -x \text{Cos}x \Big|_0^{\pi} + \text{Sen}x \Big|_0^{\pi}$$

$$= [-\pi(-1) - 0] + [0] = \pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \, dx = \int_0^{\pi} \text{Sen}x \, dx = -\text{Cos}x \Big|_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2} \, dA}{\int dA} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} y y \, dx}{\int_0^{\pi} y \, dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} y^2 \, dx}{\int_0^{\pi} y \, dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \text{Sen}^2 x \, dx}{\int_0^{\pi} \text{Sen}x \, dx}$$

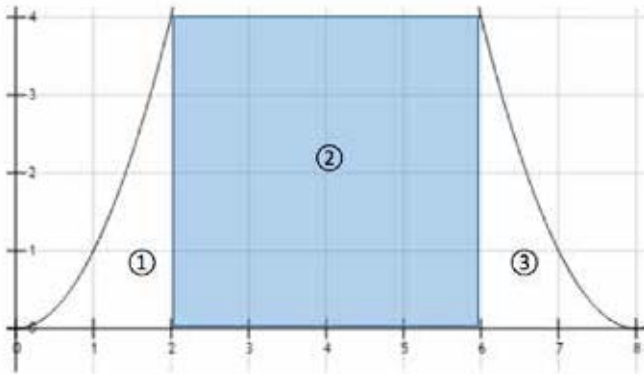
$$= \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \text{Cos}2x) \, dx}{\int_0^{\pi} \text{Sen}x \, dx} = \frac{\frac{1}{4} \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \text{Cos}2x \, dx}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{x \left|_0^{\pi} - \frac{\text{Sen} 2x}{2} \right|_0^{\pi}}{2} = \frac{1}{4} \frac{\pi - \frac{1}{2} [0]}{2} = \frac{\pi}{8}$$

5. Encontrar el centroide del área de la figura

Se divide el área en 3 zonas y se encuentra el centroide para cada una de ellas

Figura 52
Ejercicio sobre Centroide



Área 1

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 xy dx}{\int_0^2 y dx} = \frac{\int_0^2 xx^2 dx}{\int_0^2 x^2 dx} = \frac{\int_0^2 x^3 dx}{\int_0^2 x^2 dx} = \frac{\left| \frac{x^4}{4} \right|_0^2}{\left| \frac{x^3}{3} \right|_0^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2^4}{2^3} = \frac{3}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^2 \frac{1}{2} yy dx}{\int_0^2 y dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^2 y^2 dx}{\int_0^2 y dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^2 x^4 dx}{\int_0^2 x^2 dx} = \frac{\frac{1}{2} \left| \frac{x^5}{5} \right|_0^2}{\left| \frac{x^3}{3} \right|_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2^5}{2^3} = \frac{6}{5}$$

$$C_1: \left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5} \right)$$

Ya que el área 3 es simétrica al área 1, las coordenadas del centroide son

$$C_1: \left(8 - \frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{6}{5}\right)$$

Las coordenadas del centroide del área 2 por ser rectángulo son

$$C_2(4,2)$$

Las coordenadas de las 3 áreas en conjunto son:

$$\bar{x} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right) + (4)(8) + \left(\frac{13}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3}} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{8}{3}\right) + (2)(8) + \left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3}} = \frac{42}{25}$$

Solución de ejercicios propuestos sobre Ecuaciones Paramétricas

Ecuaciones Paramétricas

1. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(5,3)$ y $Q(8,2)$

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \rightarrow x = 5 + (8 - 5)t \rightarrow x = 5 + 3t$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t \rightarrow y = 3 + (2 - 3)t \rightarrow y = 3 - t$$

2. Parametrizar la curva $4x+y-5=0$

Se trata de una recta. Se sabe que las ecuaciones paramétricas de una recta son:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$$

$$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$$

Para parametrizar se necesitan dos puntos conocidos de la recta que se los puede encontrar haciendo $x=0$ y luego $y=0$

$$\text{Para } x = 0 \quad 4(0) + y - 5 = 0 \rightarrow y = 5 \text{ El primer punto es } (0,5)$$

$$\text{Para } y = 0 \quad 4x + 0 - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ El segundo punto es } \left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

Aplicando las ecuaciones paramétricas y despejando t

$$x = \frac{5}{4} + t \left(0 - \frac{5}{4} \right) \rightarrow x = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}t$$

$$y = 0 + t(5 - 0) \rightarrow y = 5t$$

3. Encontrar las ecuaciones paramétricas del círculo cuyo centro está en $(2, -5)$ y el radio es 6

Las ecuaciones paramétricas del círculo son:

$$x = h + r \cos t \rightarrow x = 2 + 6 \cos t$$

$$y = k + r \sin t \rightarrow y = -5 + 6 \sin t$$

4. Parametrizar el círculo

$$9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$$

$$9x^2 + 72x + 9y^2 - 12y = -103$$

$$9(x^2 + 8x + 16) + 9\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = -103 + 144 + 4$$

$$9(x + 4)^2 + 9\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 45$$

$$(x + 4)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{45}{9} \qquad (x + 4)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 5$$

$$x = -4 + \sqrt{5} \cos t$$

$$y = \frac{2}{3} + \sqrt{5} \sin t$$

5. Parametrizar la parábola $x = y^2 - 12y + 25$

La variable que está elevada a la segunda potencia se la toma como parámetro

$$y = t$$

$$x = t^2 - 12t + 25$$

6. Convertir las siguientes ecuaciones paramétricas de rectangulares a cartesianas: $x = t$; $y = \frac{1}{2}t^2 + 5t - 16$

Ya que el parámetro t es al a vez la variable x , entonces se puede reemplazar t por x en la segunda ecuación y se tiene:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 16 \quad \text{En su forma general}$$

$$24 = x^2 + 10x - 32 \rightarrow x^2 + 10x = 2y + 32$$

Completando cuadrados

$$x^2 + 10x + 25 = 2y + 32 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 2y + 57 \rightarrow (x + 5)^2 = 2\left(y + \frac{57}{2}\right)$$

7. Encontrar la ecuación general de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = -3 + 2\cos t$; $y = 5\sin t$

Ya que el valor mayor “a” lo tiene x , se trata de una elipse horizontal donde:

$$C(-2, 5); a = 2; b = 1$$

Ecuación simétrica:

$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y - 5)^2}{1} = 1 \rightarrow (x + 3)^2 + 4(y - 5)^2 = 4$$

$$x^2 + 6x + 9 + 4y^2 - 40y + 100 = 4$$

$$x^2 + 4y^2 + 6x - 40y + 105 = 0$$

8. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la elipse:

$$9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$$

Completando cuadrados:

$$9x^2 - 18x + 16y^2 + 64y - 71 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 4y) - 71 = 0$$

$$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) - 71 = 9 + 64$$

$$9(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 144 \rightarrow \frac{9(x-1)^2}{144} + \frac{16(y+2)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \quad a = 4; b = 3; c(1, -2)$$

Las ecuaciones paramétricas son: $x = 1 + 4\cos t; y = -2 + 3\sin t$

9. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la hipérbola

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$$

La hipérbola es horizontal con centro $C(3,5)$; $a=2$, $b=3$, luego las ecuaciones paramétricas son: $x = 3 + 2\sec t; y = 5 + 3\tan t$

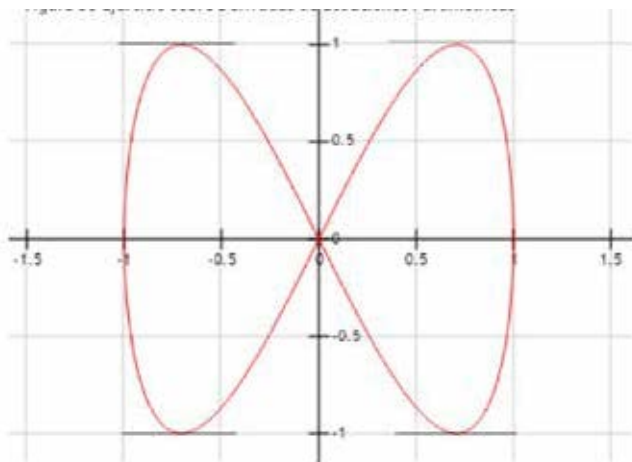
10. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 5 + \sec t; y = -2 + 3\tan t$

Es una hipérbola vertical con: $C(5, -2)$; $b = 1$; $a = 3$

La ecuación simétrica es: $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{1} = 1$

11. Graficar la función dada por $x = \cos t$; $y = \operatorname{Sen} 2t$. Encontrar los puntos donde hay tangentes horizontales

Figura 53
Ejercicio sobre Derivadas de Ecuaciones Paramétricas



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Hay tangentes horizontales en:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$$

Igualando a cero

$$2\cos 2t = 0$$

$$\cos 2t = 0 \text{ Para } 2t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{También } \cos 2t = 0 \text{ en } \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{También en } \frac{5\pi}{4} \rightarrow 2t = \frac{5\pi}{2} \rightarrow t = \frac{5\pi}{4} \text{ y en } \frac{7\pi}{4}$$

12. Calcular el área total dentro de la curva del ejercicio 11.

La cuarta parte del área total es:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t (-\sin t) dt$$

$$A = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin t dt$$

Usando la identidad trigonométrica $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin t \cos t) \sin t dt = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt$$

$$\text{Sea: } u = \sin t \rightarrow du = \cos t dt$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 du = -2 \left| \frac{u^3}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} |\sin^3 t|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} \left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0 \right) = -\frac{2}{3} u^2$$

$$A_T = 4 \frac{2}{3} u^2 = \frac{8}{3} u^2$$

Solución de ejercicios propuestos sobre Coordenadas Polares

Coordenadas Polares

1. Transformar de polares a rectangulares la función $r=2a\cos\theta$ e identificar la curva sin necesidad de graficarla

$$r = 2a \cos\theta \quad \text{Como } r = \sqrt{x^2 + y^2}; x = r\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{x}{r} = 2a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Pasando al lado izquierdo la raíz que está en el denominador

$$x^2 + y^2 = 2ax \rightarrow x^2 - 2a + y^2 = 0$$

Completando cuadrados y balanceando la ecuación

$$x^2 - 2a + a^2 + y^2 = a^2$$

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$$

Es la ecuación de una circunferencia con centro en $(a,0)$ y radio a .

2. Demostrar matemáticamente que $r = a \cos \theta + b \sin \theta$ es un círculo cuyo centro está en $(a/2, b/2)$, su radio es $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ y corta al eje x en $(a, 0)$ y al eje y en $(0, b)$

$$r = a \cos \theta + b \sin \theta$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \frac{x}{r} + b \frac{y}{r} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x^2 + y^2 = ax + by \quad (1) \quad x^2 - ax + y^2 - by = 0$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

Es una circunferencia con centro en $C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

Reemplazando en la ecuación (1) $x=0$ se tiene

$$y^2 = by \rightarrow y = b \text{ Corta al eje } y \text{ en } (0, b)$$

Reemplazando en la ecuación (1) $y=0$ se tiene

$$x^2 = ax \rightarrow x = a \text{ Corta al eje } x \text{ en } (a, 0)$$

Comprobar graficando

3. Convertir la ecuación dada en polares por $r = \sin \theta$ a rectangulares e indicar el tipo de curva

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Reemplazando en la ecuación polar:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

Es un círculo con centro en $C\left(-\frac{D}{2}, \frac{E}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Comprobar graficando

4. Convertir la siguiente ecuación dada en rectangulares a polares: $3x-2y+2=0$

Reemplazando x por $r\cos\theta$; y por $r\sin\theta$ se tiene:

$$3r\cos\theta - r\sin\theta + 2 = 0 \rightarrow r(3\cos\theta - \sin\theta) = -2$$

$$r = \frac{2}{\sin\theta - 3\cos\theta}$$

5. Encontrar una fórmula para la distancia entre dos puntos en coordenadas polares

Sean (x_2, y_2) (x_1, y_1) los puntos en coordenadas rectangulares

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{Pero: } x_2 = r_2 \cos\theta_2 \rightarrow x_1 = r_1 \cos\theta_1$$

$$y_2 = r_2 \sin\theta_2 \rightarrow y_1 = r_1 \sin\theta_1$$

Reemplazando en la fórmula para d :

$$d = \sqrt{(r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1)^2 + (r_2 \sin\theta_2 - r_1 \sin\theta_1)^2}$$

$$= \sqrt{r_2^2 \cos^2\theta_2 - 2r_2 r_1 \cos\theta_2 \cos\theta_1 - r_1^2 \cos^2\theta_1 - r_2^2 \sin^2\theta_2 + 2r_2 r_1 \sin\theta_2 \sin\theta_1 + r_1^2 \sin^2\theta_1}$$

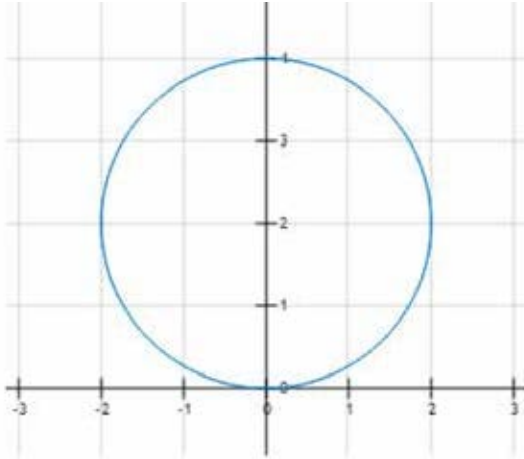
$$= \sqrt{r_2^2 (\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2) + r_1^2 (\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) - 2r_2 r_1 (\cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_2 \sin\theta_1)}$$

Aplicando identidades trigonométricas

$$d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2 r_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

6. Calcular el área encerrada por la curva $r=4\text{sen}\theta$

Figura 54
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares



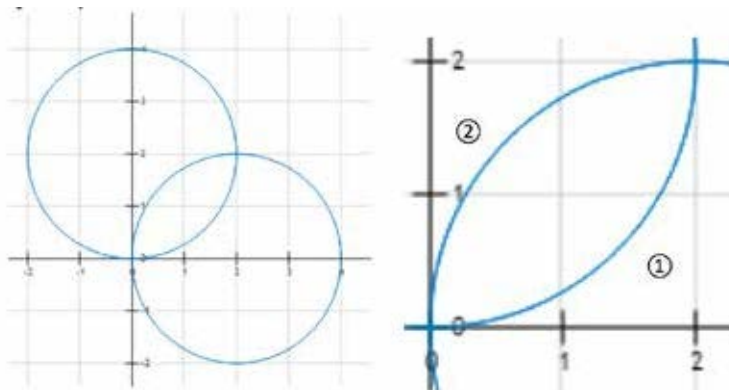
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\text{Sen}\theta)^2 d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}^2 d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \text{Cos}2\theta) = 4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}2\theta d\theta \right] \\
 &= 4 \left[\left| \theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left| \frac{\text{Sen}2\theta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = 4 \left[\frac{\pi}{2} \right] = 2\pi
 \end{aligned}$$

El área calculada es la mitad del círculo. El área total será el doble:

$$A = 4\pi$$

7. Calcular el área comprendida entre $r=4\text{sen}\theta$ y $r=4\text{cos}\theta$

Figura 55
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares



Los puntos de intersección se obtienen igualando las ecuaciones $r=4\text{sen}\theta$ y $r=4\text{cos}\theta$

Los ángulos para el cual es igual $\text{sen}\theta$ al $\text{cos}\theta$ son 0 y $\pi/4$

Para $\theta=0$, $r=0$; para $\theta= \pi/4$, $r= \sqrt{2}$

La figura de la derecha es una ampliación del área de intersección de la figura izquierda. En la figura derecha se puede apreciar una diagonal que divide el área de intersección. ① y ② son áreas diferenciales.

Para el cálculo del área de la mitad inferior se usa $r=4\text{sen}\theta$, el área diferencial ① y los límites de integración para θ son 0 a $\pi/4$.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4\text{Sen}\theta)^2 d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{Sen}^2 \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 - \text{Cos} 2\theta) d\theta \\
&= 4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{Cos} 2\theta d\theta \right] = 4 \left[\left| \theta \right|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left| \frac{\text{Sen} 2\theta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} \right] \\
&= 4 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\text{Sen} \left(2 \frac{\pi}{4} \right)}{2} \right] = 4 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\text{Sen} \frac{\pi}{2}}{2} \right] = 4 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] = \pi - 2
\end{aligned}$$

Para la mitad superior del área sombreada se trabaja con la curva $r=4\cos\theta$, el área diferencial ② y los límites de integración para θ son $\pi/4$ a $\pi/2$.

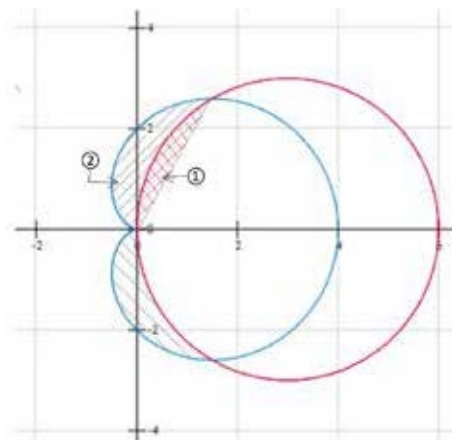
$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\text{Cos}\theta)^2 d\theta = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^2 \theta d\theta \\
&= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \text{Cos} 2\theta) d\theta = 4 \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos} 2\theta d\theta \right] \\
&= 4 \left[\left| \theta \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \left| \frac{\text{Sen} 2\theta}{2} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = 4 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{\text{Sen} \left(2 \frac{\pi}{2} \right) - \text{Sen} \left(2 \frac{\pi}{4} \right)}{2} \right) \right] \\
&= 4 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{0 - 1}{2} \right] = 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \pi - 2
\end{aligned}$$

El área total es la suma de las dos áreas ya calculadas:

$$A = (\pi - 2) + (\pi - 2) = 2\pi - 4$$

8. Calcular el área de intersección que se encuentra del lado de afuera de la curvas $r=6\cos\theta$ y dentro de $r=2\cos\theta+2$

Figura 56
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares



Cálculo de los puntos de intersección de las curvas:

$$6\cos\theta = 2\cos\theta + 2$$

$$3\cos\theta = \cos\theta + 1$$

$$2\cos\theta = 1 \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3}$$

Los puntos de intersección son: $(3, \pi/3)$ y $(3, 5\pi/3)$

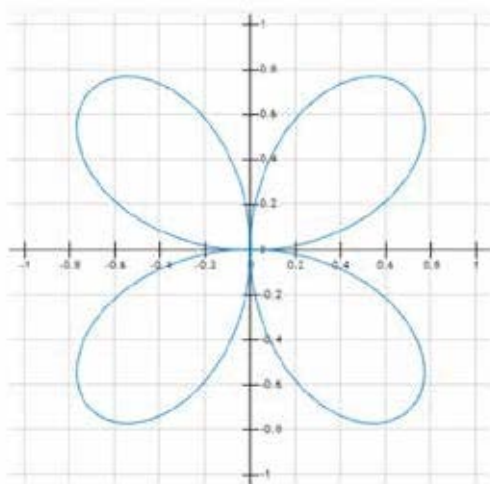
Ya que la figura es simétrica con respecto al eje x, se trabajará solo con la parte superior.

El área pedida se calcula restando $A_2 - A_1$ integrada entre $\pi/3$ y π para A_2 y entre $\pi/3$ y $\pi/2$ para A_1 .

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2} (2\cos\theta + 2)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} (4\cos^2\theta + 8\cos\theta + 4) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} 4\cos^2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} 8\cos\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} 4 d\theta \\
&= 2 \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta + 4|\sin\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} + 2|\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} \\
&= |\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} + \frac{1}{2} |\sin 2\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} + 4|\sin\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} + 2|\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} \\
&= 3|\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} + \frac{1}{2} |\sin 2\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} + 4|\sin\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi} \\
&= 3\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\sin 2\pi - \sin \frac{2\pi}{3}\right) + 4(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{3}) \\
&= 2\pi + \frac{1}{2} \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 2.38 \\
A_1 &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{2} (6\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} 36\cos^2\theta d\theta = 18 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= 9 \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta + 9 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = 9|\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} + \frac{9}{2} |\sin 2\theta| \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} \\
&= 9\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{9}{2} \left(\sin \pi - \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{9}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 0.81 \\
A_2 - A_1 &= 2\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57
\end{aligned}$$

9. Calcular el área encerrada por $r = \sin\theta$

Figura 57
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares



Área de uno de los pétalos

$$r = 0 \quad 0 = \sin 2\theta \rightarrow 2\theta = \sin^{-1}(0)$$

$$2\theta = 0, \pi, 2\pi \text{ etc } \dots$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \text{ etc } \dots$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 4\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\theta d\theta \right] = \frac{1}{4} \left[\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left| \frac{\sin 4\theta}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{4} \left(\text{Sen} 4 \frac{\pi}{2} - \text{Sen}(0) \right) \right]$$

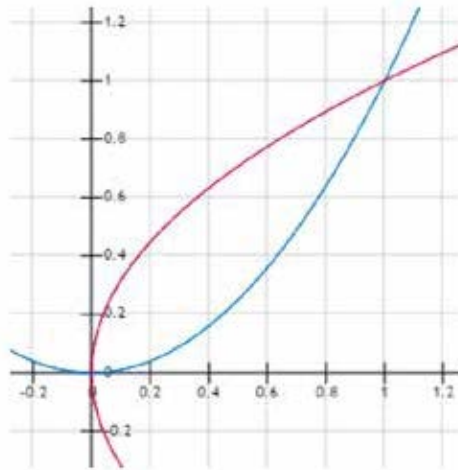
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} (0 - 0) \right] = \frac{1}{8} \pi$$

El área de los cuatro pétalos es: $A_T = 4 \left(\frac{1}{8} \pi \right) = \frac{1}{2} \pi u^2$

10. Encontrar le área encerrada por las curvas $r = \text{tg} \theta \sec \theta$ y $r = \text{cotg} \theta \cos \theta$

Figura 58

Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares



Punto de corte:

$$\text{tg} \theta \sec \theta = \text{cotg} \theta \cos \theta$$

$$\frac{\text{Sen} \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\text{Sen}^2 \theta} \rightarrow \text{Sen}^3 \theta = \cos^3 \theta$$

$$\text{Sen} \theta = \cos \theta$$

El ángulo que corresponde a esa igualdad es: $\theta = \frac{\pi}{4}$

El otro punto que cumple esta igualdad en el origen en donde $r=0$ y el $\text{sen}\theta$ para la parábola horizontal es 1 y el $\text{cos}\theta$ para la parábola vertical es 1. Luego los límites para θ van de 0 a $\pi/4$.

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 \theta \text{Sec}^2 \theta d\theta$$

$$\text{Sea: } u = tg \theta \rightarrow du = \text{Sec}^2 \theta d\theta$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du = \frac{1}{2} \left| \frac{u^3}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6} |tg^3 \theta|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6} (tg^3 \frac{\pi}{4} - tg^3 0) = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Cot} g^2 \theta \text{Cosc}^2 \theta d\theta$$

$$\text{Sea: } u = \text{Cot} g \theta \rightarrow du = -\text{Cosc}^2 \theta d\theta$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -u^2 du = -\frac{1}{2} \left| \frac{u^3}{3} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{6} |\text{Cot} g^3 \theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = -\frac{1}{6} \left(\text{Cot} g^3 \frac{\pi}{2} - \text{Cot} g^3 \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{6} (0 - 1) = \frac{1}{6}$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} u^2$$

El estudiante puede comprobar ese resultado convirtiendo las ecuaciones a rectangulares e integrando como se muestra a continuación:

$$A = \int_0^1 (y_2 - y_1) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left|_0^1 \sqrt{x} \, dx \right|_0^1 x^2 \, dx = \left| \frac{x^{3/2}}{3/2} \right|_0^1 - \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(1-0) - \frac{1}{3}(1-0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}u^2$$